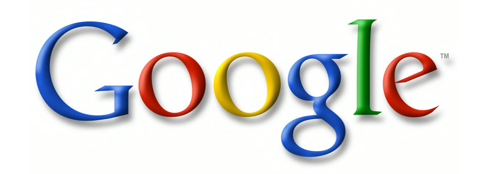





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

publié par la

" RIVISTA DI MATEMATICA "

TOME I



TURIN
BOCCA FRÈRES || CH. CLAUSEN
LIBRAIRES
1895

Tip. V. Fodratti & E. Lecco, via Gaudenzio Ferrari, 3 - Torino.

PRÉFACE

Le Formulaire de Mathématiques a pour but de publier les propositions connues sur plusieurs sujets des sciences mathématiques. Ces propositions sont exprimées en formules par les notations de la Logique mathématique, expliquées dans l'Introduction au Formulaire.

Des essais des premières parties du Formulaire, ont paru comme suppléments de la « Rivista di Matematica » en 1892 (voir t. II, p. 76).

Les I, II, III parties ont été rédigées et complétées en collaboration auxquelles prirent part notamment à la I partie M. G. Vailati, à la II partie M. F. Castellano, à la III partie M. C. Burali-Forti.

Les Auteurs qui ont rédigé les autres parties sont soussignés.

Les volumes qui paraîtront, contiendront d'autres monographies.

Mais, quel que soit le soin apporté par l'Auteur d'une partie, on pourra y rencontrer des fautes et des lacunes, notamment dans une première édition. D'autre part il est à peu près impossible à une seule personne de compulser tous les livres, de vérifier toutes les indications historiques à cet égard. Nous publierons dans la « Rivista di Matematica » et dans les volumes suivants du Formulaire, toutes les additions et les corrections qu'on nous indiquera. On pourra de même republier une partie qui aurait déjà paru, après l'avoir perfectionnée. Chaque partie du Formulaire, bien que commencée par un Auteur, sera en définitive le résultat du travail de tous les collaborateurs.

Nous ajouterons quelques remarques pour nos futurs collaborateurs.

1. La seule loi qui règle les notations du Formulaire, c'est qu'elles soient les plus simples et les plus précises, pour représenter les propositions dont il s'agit.

2. Les notations sont un peu arbitraires, mais les propositions sont des vérités absolues, indépendantes des notations adoptées.

3. Toutes les fois qu'on traduit en symboles une nouvelle théorie, on introduira des signes nouveaux pour indiquer les idées nouvelles,

ou les nouvelles combinaisons des idées précédentes, qu'on rencontre dans cette théorie.

4. La réduction d'une nouvelle théorie en symboles, exige une analyse profonde des idées, qui figurent dans cette branche; avec les symboles on ne peut pas représenter des idées non précises.

5. On ne doit pas représenter par un signe nouveau toute idée indiquée par un mot simple dans le langage ordinaire. Ce point constitue une différence importante entre le langage ordinaire et les notations de la logique mathématique.

6. On introduira une notation nouvelle, au moyen d'une *définition*, lorsqu'elle apporte une notable simplification. On ne formera pas une notation nouvelle, lorsqu'on peut déjà représenter la même idée simplement par les notations précédentes. Ainsi, on n'a pas introduit un symbole pour indiquer « le nombre a est premier avec b » car on peut écrire $\mathrm{D}(a, b) = 1$. On n'a pas introduit des symboles pour dire « l'ensemble u est fermé, ou parfait, etc. », car on peut écrire $Du \mathrm{o} u$, $Du = u$, etc. (Voir les parties V et VI du Formulaire).

7. On introduira une notation nouvelle seulement si la simplification qu'elle apporte se rencontre dans une suite de propositions. On ne formera pas une théorie avec des définitions.

8. Toutefois, il est bien de former une table des noms du langage ordinaire qu'on ne traduit pas par un symbole simple, mais qu'on décompose dans une combinaisoin de signes.

9. Si l'on n'a pas ce soin, on aura les mêmes propositions écrites plusieurs fois, sous des formes différentes, dont on ne reconnaît pas tout de suite l'identité. Quelquefois on présente comme un théorème ce qui n'est qu'une identité.

10. Toute définition est exprimée par une égalité; dans le premier membre on a le signe qu'on définit, qui est ou un signe nouveau, ou une nouvelle combinaison des signes connus; dans le second on a sa valeur (voir Introd., § 36). Il faut que les deux membres soient *homogènes*; ils doivent contenir les mêmes lettres variables. Toutefois on peut sousentendre dans le signe qu'on définit quelque lettre variable, si elle a une valeur constante dans une suite de propositions.

11. Nous invitons nos collaborateurs de prendre les lettres variables sous la forme a, b, ... x, y, z, en italique et de représenter les idées dont la valeur est constante, par les combinaisons des lettres a, b,... en romain, par des majuscules et par des lettres grecques. Dans le manuscrit il convient de souligner les lettres en romain, et non les lettres en italique.

12. Il n'y a pas de confusion possible à représenter par une même lettre des idées différentes dans des propositions différentes. Car au

commencement de chaque proposition, il faut toujours dire la signification des lettres variables.

13. Il convient de dire la signification des lettres variables, et non des combinaisons, ou fonctions des lettres variables, dont la signification est conséquence.

14. Au lieu de rappeler explicitement dans chaque proposition la signification des lettres variables, il suffit de le dire au commencement d'un §, ou d'une suite de propositions (voir p. ex. III § 1, § 2, ... V § 1, § 2, ...). Cela ne constitue pas une convention nouvelle, mais bien une application des identités de logique $ab \supset c . = : a \supset . b \supset c$ et $a \supset b . a \supset c . = . a \supset bc$ (Form. I § 1 P36 et 39).

Ainsi (Form. III § 3 P6, 7) au lieu de dire:

6'. $a , b \varepsilon \mathrm{N} . a \varepsilon \mathrm{N} b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = b .$
7'. $a , b \varepsilon \mathrm{N} . a > b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = \mathrm{D}(b , a - b)$

on peut écrire

6''. $a , b \varepsilon \mathrm{N} . \supset : a \varepsilon \mathrm{N} b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = b$
7''. » $\supset : a > b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = \mathrm{D}(b , a - b)$

et enfin

$a , b \varepsilon \mathrm{N} . \supset :$
6. $a \varepsilon \mathrm{N} b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = b$
7. $a > b . \supset . \mathrm{D}(a , b) = \mathrm{D}(b , a - b)$

comme on trouve dans le Formulaire.

15. Les expressions, comme $a , b \varepsilon \mathrm{N}$, qu'on trouve en tête des § ont la signification expliquée. Elles n'ont pas exactement la signification « dans ce qui suit a, b sont des nombres », car si la proposition $a \varepsilon \mathrm{N}$ se trouve dans la thèse d'une proposition, on ne peut pas la porter dans l'hypothèse, sans contredire aux formules de logique; mais il faut la laisser à sa place.

16. Il faut bien reconnaître dans les différentes parties des propositions les lettres variables, qui sont apparentes dans une expression, c'est-à-dire telles que la valeur de l'expression soit indépendante du nom des lettres. Bien que cela soit expliqué dans l'Introduction au Formulaire, on l'apprend mieux par l'usage.

17. Le signe de déduction $\supset$ entre des propositions a toujours des lettres variables comme indices, deux cas exceptés. Il n'a pas d'indices écrits lorsqu'il est le signe de déduction principal, qu'on reconnaît au plus grand nombre de points écrits à ses côtés; dans ce cas les indices sont sousentendus, et sont toutes les lettres variables qui figurent dans les deux membres (Intr. § 14). L'autre cas d'exception se présente

lorsqu'il est entre deux propositions cathégoriques, qui ne dépendent pas de lettres variables (Intr. § 15), c'est-à-dire qui ne contiennent pas de lettres variables, ou qui contiennent seulement de variables apparentes, ou qui contiennent des variables qui figurent comme indices explicites ou sousentendus, à un autre signe de déduction, et qui dans cette déduction se comportent comme des constantes. Ainsi dans la P6″, ci-dessus écrite, le premier signe de déduction $.\supset:$ ne porte pas d'indices, car il est le signe de déduction principal; les indices sousentendus sont *a* et *b*. Le second signe $.\supset.$ ne porte pas d'indices, car dans les deux membres, il n'y a pas de nouvelles lettres variables.

18. Le signe ε (est) sert seulement pour lier le sujet à l'attribut, l'individu à la classe. Il n'a pas la signification de *exister*; on ne peut pas trouver une proposition de la forme $x\,\varepsilon$. On pourrait même théoriquement supprimer ce signe. Car, si aux symboles Np, q, alg_2, ... nous attribuons les significations « est un nombre premier », « est un nombre réel », « est un nombre algébrique quadratique », on pourra écrire

$$7\,\text{Np} \qquad e\,\text{q} \qquad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,\text{alg}_2$$

pour représenter les propositions « 7 est un nombre premier », « *e* est un nombre réel », « $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est un nombre algébrique, racine d'une équation du second degré irréductible à coefficients entiers », sans faire usage du signe ε.

19. Les signes de logique, qui figurent entre classes, ou entre propositions, dans le Formulaire, sont au nombre de six, $\cap, \cup, -, =, \supset, \Lambda$; dans la I partie du Formulaire, on donne comme idées primitives les $\cap$, $-$, $\supset$, et l'on définit les autres. On pourrait faire des combinaisons différentes. Dans le manuscrit il est bon de donner au signe « non » la forme $\backsim$, afin de ne le pas confondre avec le — (moins).

20. Après avoir écrit une formule en symboles, il convient d'appliquer à la formule quelques transformations de logique. On verra ainsi, s'il est possible de la réduire à une forme plus simple; et l'on reconnaît facilement si la formule n'est pas bien écrite.

21. Car les notations de logique ne sont pas seulement une tachigraphie, pour représenter sous une forme abrégée les propositions de mathématiques; elles sont un instrument puissant pour analyser les propositions et les théories.

22. Il y a toujours des difficultés à ordonner les propositions d'une théorie. On peut les ordonner selon les signes employés pour les écrire. Cette loi conduit, en général, à de bons résultats.

23. Dans la numération des propositions d'un §, il est bien de ne pas adopter la suite continue des nombres, mais de laisser des lacunes; on y écrira les propositions à ajouter.

24. Il est bien de reproduire les indications historiques qu'on rencontre dans les livres, sans les vérifier toutes, car cela exige un long travail, que pourra faire un autre collaborateur.

25. On peut aussi publier les démonstrations des propositions, ou au moins les liens qui subsistent entre les propositions d'une suite. Mais la transformation en symboles d'une démonstration est en général plus difficile que l'énonciation d'un théorème.

26. La réduction d'une théorie en symboles demande des études, des recherches et des soins, qu'on ne s'imagine pas, si l'on n'a pas fait au moins une fois ce travail. Nous prions donc nos collaborateurs à commencer par réduire une partie simple et courte.

27. Et pour les en récompenser en quelque façon, nous offrons l'abonnement annuel à la *Rivista di Matematica* à tous ceux qui contribueront au développement du Formulaire, en ajoutant de nouvelles parties, ou en corrigeant les parties publiées, et les notes historiques.

G. Peano.

I.

§ 1.

1.	$a \supset a$	[Pp.]
2.	$a \supset aa$	[Pp.]
* 3.	$a = b . = . a \supset b . b \supset a$	[Def.]
* 4.	$a = a$	[P1 . $\supset$. P4]
* 5.	$ab \supset a$	[Pp.]
* 6.	$a = aa$	[P2 . $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ P5 . $\supset$. P6]
7.	$ab \supset ba$	[Pp.]
* 8.	$ab = ba$	[P7 . $\left(\begin{smallmatrix} b, & a \\ a, & b \end{smallmatrix}\right)$ P7 . $\supset$. P8]
9.	$abc \supset acb$	[Pp.]
*10.	$abc = acb$	[P9 . $\supset$. P10]
*11.	$a \supset b . \supset . ac \supset bc$	[Pp.]
*12.	$a . a \supset b . \supset . b$	[Pp.]
*13.	$a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c$	[Pp.]
14.	$abc \supset bac$	[P7 . $\left(\begin{smallmatrix} ab, & ba \\ a, & b \end{smallmatrix}\right)$ P11 . P12 . $\supset$. P14]
15.	$ab \supset b$	[P7 . $\left(\begin{smallmatrix} b, & a \\ a, & b \end{smallmatrix}\right)$ P5 . P13 . $\supset$. P15]
16.	$a = b . \supset . a \supset b$	[P3 . P5 . $\supset$. P11]
17.	$a = b . \supset . b \supset a$	[P3 . P15 . $\supset$. P17]
18.	$a \supset b . b \supset a . \supset . a = b$	[P3 . P1 . $\supset$. P18]
19.	$a = b . \supset . b = a$	[P3 . P7 . $\supset$. P19]
*20.	$a = b . = . b = a$	[P19 . $\left(\begin{smallmatrix} b, & a \\ a, & b \end{smallmatrix}\right)$ P19 . = . P20]
21.	$a = b . b \supset c . \supset . a \supset c$	[Hp. $\supset . a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c$]
22.	$a \supset b . b = c . \supset . a \supset c$	[Idem]

*23. $a = b . b = c . \supset . a = c$

[Hp. $\supset . a \supset b . b \supset c . c \supset b . b \supset a . \supset . a \supset c . c \supset a . \supset$. Ts.]

(α) $a \supset b . b \supset c . c \supset d . \supset . a \supset c . c \supset d$ [P13 . P11 . $\supset$. (α)]

*24. $a \supset b . b \supset c . c \supset d . \supset . a \supset d$ [(α) . P13 . $\supset$. P24]

25. $a = b . b = c . c = d . \supset . a = d$. [Hp. P23 . $\supset . a = c . c = d . \supset$. Ts.]

26. $b \supset . a \supset ab$ [Pp.]

(α) $c . \supset . a \supset ac$ $\left[\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right.$ P26 . $\supset$. $(\alpha)\Big]$

(β) $c . ac \supset bc . \supset . a \supset ac . ac \supset bc$ [(α) . P11 . $\supset$. (β)]

(γ) $c . ac \supset bc . \supset . a \supset bc$ [(β) $\supset$ (γ)]

(δ) $a \supset b . c . \supset . ac \supset bc . c$ [P11 . $\supset$. (δ)]

(ε) $a \supset b . c . \supset . c . ac \supset bc$ [(δ) . P7 . $\supset$. (ε)]

27. $a \supset b . c . \supset . a \supset bc$ [(ε) (γ) . $\supset$. P27]

28. $a \supset b . \supset . ca \supset cb$ [Hp. P11 . P7 . $\supset . ac \supset bc . ca \supset ac . bc \supset cb . \supset$. Ts.]

29. $a \supset b . \supset . a \supset ab$ [Hp. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ P28 . P2 . $\supset$. Ts.]

*30. $a \supset b . c \supset d . \supset . ac \supset bd$ [Hp. $\supset . ac \supset bc . c \supset d . \supset . ac \supset bc . bc \supset bd . \supset$. Ts.]

*31. $a = b . \supset . ac = bc$ [Hp. $\supset . a \supset b . b \supset a . \supset . ac \supset bc . bc \supset ac . \supset$. Ts.]

*32. $a = b . c = d . \supset . ac = bd$ [Hp. $\supset . ac = bc . bc = bd . \supset$. Ts.]

(α) $a \supset b . \supset . a = ab$ [Hp. P29 . P5 . $\supset$. Ts.]

(β) $a = ab . \supset . a \supset b$ [Hp. P15 . $\supset$. Ts.]

*33. $a \supset b . = . a = ab$ [(α) (β) = P33]

34. $a \supset b . a \supset c . \supset . a \supset bc$ [Hp. P30 . $\supset . aa \supset bc$. P2 . $\supset$. Ts.]

35. $a \supset bc . \supset . a \supset b . a \supset c$ [P5 . P15 . P34 : $\supset$. P35]

*36. $a \supset bc . = . a \supset b . a \supset c$ [P34 . P35 . = . P36]

37. $a \supset . b \supset c : \supset . ab \supset c$ [Hp. $\supset :: ab \supset : b \supset c . b .\!\cdot.$ P12 :: $\supset$. Ts.]

38. $ab \supset c . \supset : a \supset . b \supset c$ [Hp. P26 . $\supset .\!\cdot. a \supset . b \supset ab : ab \supset c :$
P27 $.\!\cdot. \supset .\!\cdot. a \supset : b \supset ab . ab \supset c .\!\cdot.$ P13 $.\!\cdot. \supset$. Ts.]

*39. $a \supset . b \supset c : = . ab \supset c$ [P37 . P38 . = . P39]

40. $b \supset c . \supset : a \supset b . \supset . a \supset c$ [P13 . P38 . $\supset$. P40]

41. $a \supset b . \supset : b \supset c . \supset . a \supset c$ [P13 . P38 . $\supset$. P41]

42. $a \supset . b \supset a$ $\left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right.$ P38 $\supset$ P42$\Big]$

43. $a \supset : a \supset b . \supset b$ [P38 . P12 . $\supset$. P43]

44. $ab \supset c . ac \supset b : = : a \supset . b = c$ [Hp. $= (a \supset . b \supset c)(a \supset . c \supset b) =$ Ts.]

45. $a \supset . bc = bd : = : ab \supset . c = d$ [P44 $\supset$ P45]

§ 2.

1. $a \supset b . \supset . -b \supset -a$ [Pp.]

2. $a = b . \supset . -a = -b$ $\left[\mathrm{P1} . \begin{pmatrix} b, a \\ a, b \end{pmatrix} \mathrm{P1} : \supset . \mathrm{P2}\right]$

* 3. $-(-a) = a$ [Pp.]

* 4. $a \supset b . = . -b \supset -a$ $\left[\mathrm{P1} . \begin{pmatrix} -b, -a \\ a, b \end{pmatrix} \mathrm{P1} : \supset . \mathrm{P4}\right]$

* 5. $a = b . = . -a = -b$ [P2 $\supset$ P5]

6. $a \cup b = -[(-a)(-b)]$ [Def.]

* 7. $-(a \cup b) = (-a)(-b)$ [P6 $\supset$ P7]

* 8. $-(ab) = (-a) \cup (-b)$ $\left[\begin{pmatrix} -a, -b \\ a, b \end{pmatrix} \mathrm{P6} = \mathrm{P8}\right]$

* 9. $a \cup b = b \cup a$ $[a \cup b = -[(-a)(-b)] = -[(-b)(-a)] = b \cup a]$

* 9'. $a \cup b \cup c = a \cup c \cup b$

*10. $a \cup a = a$ $[a \cup a = -[(-a)(-a)] = -(-a) = a]$

*11. $a \supset b . \supset . a \cup c \supset b \cup c$ [Hp. $\supset . -b \supset -a . \supset . -b -c \supset -a -c . \supset .$ Ts.]

*12. $a = b . \supset . a \cup c = b \cup c$ [P11 $\supset$ P12]

*13. $a \supset b . c \supset d . \supset . a \cup c \supset b \cup d$ [P11 $\supset$ P13]

*14. $a = b . c = d . \supset . a \cup c = b \cup d$ [P12 $\supset$ P14]

*15. $a \supset a \cup b$ [§1 P5 $\supset . -a -b \supset -a . \supset .$ Ts.]

*16. $a \supset b . = . b = a \cup b$ [§1 P33 $\supset$ P16]

*17. $a \supset c . b \supset c . = . a \cup b \supset c$ [§1 P36 $\supset$ P17]

18. $a \cup ab = a$ [§1 P5 $\supset : ab \supset a .$ P16 $: \supset . a \cup ab = a$]

19. $a(a \cup b) = a$ [P15 . §1 P33 . $\supset$. P19]

20. $ac \cup bc \supset (a \cup b)c$ [P15 . $\supset : ac \supset (a \cup b)c . bc \supset (a \cup b)c .$ P17 : $\supset$. Ts.]

(α) $c \supset . a \supset ac$ [§1 P26 $\supset$ (α)]

(β) $c \supset . b \supset bc$ [§1 P26 $\supset$ (β)]

(γ) $c \supset . a \supset ac . b \supset bc$ [(α) (β) . §1 P34 $\supset$ (γ)]

(δ) $c \supset . a \cup b \supset ac \cup bc$ [(γ) P13 $\supset$ (δ)]

21. $(a \cup b)c \supset ac \cup bc$ [(δ) . §1 P39 $\supset$. P21]

*22. $(a \cup b)c = ac \cup bc$ [P22 = . P20 . P21]

23. $(a \cup c)(b \cup c) = ab \cup c$ $[(a \cup c)(b \cup c) = ab \cup ac \cup bc \cup c = ab \cup c]$

*24. $ab \supset c . = . a -c \supset -b .$

$[ab \supset c : = : a \supset . b \supset c : = : a \supset . -c \supset -b : = : a -c \supset -b]$

*25. $ab \supset c . = . a \supset c \cup -b$

*26. $ab \supset c \cup d . = . a -c \supset -b \cup d$

27. $ac \supset bc \,.\, a \cup c \supset b \cup c \,.\, \supset .\, a \supset b$
28. $ac = bc \,.\, a \cup c = b \cup c \,.\, \supset .\, a = b$
29. $a = b \,.\, = .\, a \cup b \supset ab$
30. $(a \cup b)\,(b \cup c)\,(c \cup a) = ab \cup bc \cup ca$
31. $ab \supset cd \,.\, b \cup c \supset a \cup d \,.\, \supset .\, b \supset d$
32. $(a \cup x)\,(b \cup -x) = a - x \cup bx$
33. $(ax \cup b - x)\,(a'x \cup b' - x) = aa'x \cup bb' - x$
34. $-(ax \cup b - x) = (-a)x \cup (-b)\,(-x)$
35. $a \cup b = a \cup (-a)b$

§ 3.

* 1. $a - a = \Lambda$ [Pp.]
1′. $\mathrm{V} = -\Lambda$ [Def.]
1″. $a \cup -a = \mathrm{V}$
* 2. $a \Lambda = \Lambda$ $[a\Lambda = aa - a = a - a = \Lambda]$
2′. $a \cup \mathrm{V} = \mathrm{V}$
* 3. $\Lambda \supset a$ $[\Lambda \supset a . - a \supset a]$
3′. $a \supset \mathrm{V}$
* 4. $a \cup \Lambda = a$ [P3 . §2 . P16 : $\supset$. P4]
4′. $a \frown \mathrm{V} = a$
5. $a \cup (b - b) = a$ [P1 . P4 . $\supset$. P5]
6. $ab \cup a - b = a$ [P5 $\supset$ P6]
7. $a \supset \Lambda \,.\, = .\, a = \Lambda$ [P3 $\supset$ P7]
7′. $\mathrm{V} \supset a \,.\, = .\, \mathrm{V} = a$
(α) $a \supset b \,.\, \supset .\, a - b = \Lambda$ [Hp. $\supset : a - b \supset b - b$. P1 $: \supset : a - b \supset \Lambda$. P7 $: \supset$. Ts.]
(β) $a - b = \Lambda \,.\, \supset .\, a \supset b$ [Hp. P6 : $\supset$: $a = ab$. §2 P33 : $\supset$. Ts]
* 8. $a \supset b \,.\, = .\, a - b = \Lambda$ [(α) (β) = P8]
8′. $a \supset b \,.\, = .\, b \cup -a = \mathrm{V}$
8″. $ab = \Lambda \,.\, = .\, a \supset -b$.
* 9. $a \cup b = \Lambda \,.\, = .\, a = \Lambda \,.\, b = \Lambda$ [P7 . §2 . P17 : $\supset$. P9]
10. $a \cup b - = \Lambda \,.\, = .\, a - = \Lambda \,.\cup .\, b - = \Lambda$. [P9 = P10]
11. $a = \Lambda \,.\cup .\, b = \Lambda \,.\supset .\, ab = \Lambda$ [P2 $\supset$ P11]
12. $ab - = \Lambda \,.\supset .\, a - = \Lambda \,.\, b - = \Lambda$ [P11 = P12]
13. $a \supset b \,.\, b = \Lambda \,.\supset .\, a = \Lambda$. [P7 $\supset$ P13]

14. $a \supset b . a - = \Lambda . \supset . b - = \Lambda .$ [P13 = P14]
15. $ax \cup b - x = \Lambda . = . b \supset x \supset - a$
16. $ax \cup b - x = \Lambda . \supset . ab = \Lambda$
17. $ax \cup b - x - = \Lambda . \supset . a \cup b - = \Lambda .$
18. $ax \cup b - x = \Lambda . px \cup q - x - = \Lambda . \supset . ab = \Lambda . p - a \cup q - b - = \Lambda$
19. $x \supset a . y \supset b . ab = \Lambda . \supset . xy = \Lambda$
20. $xy - = \Lambda . x \supset a . y \supset b . \supset . ab - = \Lambda$ [P19 = P20]
21. $ab = \Lambda . x \cup y = a \cup b . x \supset a . y \supset b : \supset : a \supset x . b \supset y . xy = \Lambda$
22. $x \supset a . y \supset b . z \supset c . x \cup y \cup z = a \cup b \cup c . ab = \Lambda . ac = \Lambda . bc = \Lambda . \supset . a = x . b = y . c = z$
23. $ab = ac = bc = \Lambda . a \cup b \cup c = x \cup y \cup z : \supset \therefore x \supset a . y \supset b . z \supset c : = : x = a . y = b . z = c .$
24. $a \circ b = a - b \cup b - a$ [Def.]
25. $a \circ \Lambda = a .$
26. $a \circ a = \Lambda$
27. $a \circ b = b \circ a$
28. $(a \circ b) \circ c = (a \circ b) \circ c$
29. $-(a \circ b) = (-a) \circ b = a \circ (-b)$
30. $a = b \circ c . = . b = a \circ c . = . c = a \circ b$
31. $a \supset b . bc = \Lambda . \supset . ac = \Lambda$

§ 4.

1. $a, b \varepsilon K . \supset \therefore a \supset b . = : x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b$ [Def.]
2. » $. \supset : a = b . = . a \supset b . b \supset a$ [Def.]
3. » $. \supset . a \cap b = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon a . x \varepsilon b)$ [Def.]
3'. » $. \supset . ab = a \cap b$
4. » $. \supset . a \cup b = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b)$ [Def.]
5. $a \varepsilon K . \supset . - a = \overline{x \varepsilon} (x - \varepsilon a)$ [Def.]
6. » $. \supset \therefore a = \Lambda . = : x \varepsilon a . =_x \Lambda$ [Def.]
7. $u \varepsilon K . a \varepsilon u . \supset . a = a$
8. » $. a, b \varepsilon u . \supset : a = b . = . b = a .$
9. » $. a, b, c \varepsilon u . \supset : a = b . b = c . \supset . a = c .$
10. » $. a = b . b \varepsilon u . \supset . a \varepsilon u .$

§ 5.

$a, b, c, d \, \varepsilon \, \mathrm{K} . \supset :$

1. $f \, \varepsilon \, b|a . = : x \, \varepsilon \, a . \supset_x . fx \, \varepsilon \, b .$ } [Def.]

2. » $. x, y \, \varepsilon \, a . x = y . \supset . fx = fy .$ } [Def.]

3. » $. \supset . fa = \overline{y \, \varepsilon} \, [x \, \varepsilon \, a . fx = y : -=_x \Lambda] .$ [Def.]

4. » $. c \supset a . \supset . f \, \varepsilon \, b|c .$

5. » $. c \supset a . \supset . fc \supset fa .$

6. » $. \supset . f\Lambda = \Lambda .$

7. » $. b \supset c . \supset . f \, \varepsilon \, c|a .$

8. $f \, \varepsilon \, c|a . f \, \varepsilon \, c|b . \supset . f \, \varepsilon \, c|(a \cup b) .$

9. » » $. \supset . f(a \cup b) = fa \cup fb .$

10. » » $. \supset . f(a \cap b) \supset (fa) \cap (fb) .$

11. $f, g \, \varepsilon \, b|a . \supset .\!\cdot . f = g . = : x \, \varepsilon \, a . \supset_x . fx = gx .$ [Def.]

12. $f \, \varepsilon \, b|a . g \, \varepsilon \, c|b . x \, \varepsilon \, a . \supset . (gf)x = g(fx) .$ [Def.]

13. » » $. \supset . gf \, \varepsilon \, c|a .$

14. » » $. h \, \varepsilon \, d|c . \supset . h(gf) = (hg)f = hgf .$

$s \, \varepsilon \, \mathrm{K} . \supset :$

15. $f \, \varepsilon \, s|s . x \, \varepsilon \, s . \supset . f^1 x = fx .$ } [Def.]

16. » » $. m \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . f^{m+1}x = f f^m x .$ } [Def.]

17. » $. m \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . f^m \, \varepsilon \, s|s .$

18. » $. m, n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . f^m f^n = f^{m+n} .$

19. $f, g \, \varepsilon \, s|s . fg = gf . m, n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . f^m g^n = g^n f^m .$

20. » » $. m \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . (fg)^m = f^m g^m .$

21. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K} . f \, \varepsilon \, b|a . y \, \varepsilon \, b . \supset . \bar{f}y = \overline{x \, \varepsilon} \, (fx = y) .$ [Def.]

21′. » » » $. \supset : x \, \varepsilon \, \bar{f}y . = . fx = y .$

22. » $. \supset : f \, \varepsilon \, (b|a) \, \mathrm{sim} . = . f \, \varepsilon \, b|a . \bar{f} \, \varepsilon \, a|b .$ [Def.]

23. $f \, \varepsilon \, (s|s) \, \mathrm{sim} . x \, \varepsilon \, s . \supset . \bar{f}fx = x . f\bar{f}x = x . \bar{\bar{f}} = f .$

24. » $. a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K}s . \supset : a \supset b . = . fa \supset fb .$

25. » » $. \supset : a = b . = . fa = fb .$

26. » » $. \supset : f(a \cap b) = (fa) \cap (fb) .$

27. » $. m \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . \overline{f^m} = \bar{f}^m .$

28. $f, g \, \varepsilon \, (s|s) \, \mathrm{sim} . \supset . \overline{gf} = \bar{f}\,\bar{g} .$

29. » $. fg = gf . \supset . \bar{f}g = g\bar{f} . \bar{f}\,\bar{g} = \bar{g}\,\bar{f} .$

30. $f \varepsilon s|s . x \varepsilon s . \supset . f^0 x = x$. [Def.]

31. $f \varepsilon (s|s)$ sim . $m \varepsilon$ N . $\supset$. $f^{-m} = \bar{f}^m$. [Def.]

32. $f \varepsilon s|s . m, n \varepsilon$ N . $\supset$. $(f^m)^n = f^{mn}$.

33. $f \varepsilon (s|s)$ sim . $m, n \varepsilon$ n . $\supset$. $(f^m)^n = f^{mn}$.

II.

§ 1.

$a, b, c, d \, \varepsilon \, q \, . \, \supset :$

1. $a + b \, \varepsilon \, q$.
2. $a = b . = . a + c = b + c$.
3. $a + b = b + a$ . . . . [v. P53]
4. $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ . . . . [v. P54]
5. $a + 0 = a$.
6. $-a \, \varepsilon \, q$.
7. $a = b . = . -a = -b$.
8. $-(-a) = a$.
9. $a - a = 0$.
10. $a = b . = . a - b = 0$.
11. $-(a + b) = -a - b$.
12. $a - b = a + (-b) = -(b - a)$.
13. $a + b = c . = . a = c - b$.
14. $a + b = 0 . a - b = 0 . = . a = 0 . b = 0$.
15. $(a - b) + b = a$.
16. $(a + b) - b = a$.
17. $a - (a - b) = b$.
18. $a + (b - c) = a + b - c$.
19. $a - (b - c) = a - b + c$.
20. $a - (b + c) = a - b - c$.
21. $a \, \varepsilon \, Q . = . a > 0$.
22. $a > b . = . b < a . = . a \, \varepsilon \, b + Q . = . a - b \, \varepsilon \, Q$.

23. $a > b \,.\, b > c \,.\supset.\, a > c$.
24. $a > b \,.=.\, a + c > b + c$.
25. $a > b \,.\, c > d \,.\supset.\, a + c > b + d$.
26. $a > b \,.=.\, -a < -b$.
27. $a > b \,.=.\, c - a < c - b$.
28. $a + a = 2a$.
29. $(a + b) + (a - b) = 2a$.
30. $(a + b) - (a - b) = 2b$.
31. $a + \mathrm{q} = \mathrm{q}$.
32. $\mathrm{q} + \mathrm{q} = \mathrm{q}$.
33. $-\mathrm{q} = \mathrm{q}$.
34. $\mathrm{Q} + \mathrm{Q} = \mathrm{Q}$.
35. $-\mathrm{Q} - \mathrm{Q} = -\mathrm{Q}$.
36. $0 -\varepsilon\, \mathrm{Q}$.
37. $\mathrm{q} = \mathrm{Q} \cup \iota 0 \cup -\mathrm{Q}$.

41. $\mathrm{mod}\, 0 = 0$.
42. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{mod}\, a = a$. } [Def.]
43. $a \,\varepsilon\, -\mathrm{Q} \,.\supset.\, \mathrm{mod}\, a = -a$.
44. $\mathrm{mod}\,(a + b) \leqq \mathrm{mod}\, a + \mathrm{mod}\, b$ . . . . . . [v. P55]
45. $\mathrm{mod}\,(-a) = \mathrm{mod}\, a$.

51. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Z}_m = 1 \cup 2 \cup 3 \cup \ldots \cup m = \mathrm{N} - (m + \mathrm{N})$ . . [Def.]
52. » $.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}|\mathrm{Z}_m \,.\supset.\, \Sigma_1^m f = \Sigma_{r=1}^{r=m} fr = f1 + f2 + \ldots + fm$. [Def.]
53. » . » $.\, g \,\varepsilon\, (\mathrm{Z}_m|\mathrm{Z}_m)\, \mathrm{sim} \,.\supset.\, \Sigma_{r=1}^{r=n} fr = \Sigma_{r=1}^{r=m} f(gr)$
54. $m, m' \varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}|\mathrm{Z}_{m+m'} \,.\supset.\, \Sigma_{r=1}^{r=n+m'} fr = \Sigma_{r=1}^{r=m} fr + \Sigma_{r=1}^{r=m'} f(m + r)$
55. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}|\mathrm{Z}_m \,.\supset.\, \mathrm{mod}\, \Sigma_{r=1}^{r=m} fr \leqq \Sigma_{r=1}^{r=m} \mathrm{mod}\, fr$.
56. $p, q \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, p < q \,.\supset.\, \mathrm{Z}(p, q) = p - 1 + \mathrm{Z}_{q-p} = \mathrm{n} - (q + \mathrm{N}) - (p - \mathrm{N})$ [Def.]
57. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Z}_m = \mathrm{Z}(1, m)$
58. $p, q \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q}|\mathrm{Z}(p, q) \,.\supset.\, \Sigma_p^q f = \Sigma_{r=p}^{r=q} fr = fp + f(p + 1) + \ldots +$
$f(q - 1) + fq$ . . . . [Def.]

§ 2.

$a, b, c, d \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset:$

1. $ab \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.
2. $a \times b = ab$.
3. $a \times 0 = 0$.
4. $a \times 1 = a$.
5. $a \times (-1) = -a$.
6. $ab = ba$. . . . . [v. P44]
7. $(ab)c = a(bc) = abc$. . . . . [v. P45]
8. $a(b+c) = ab + ac$. . . . . [v. P46]
9. $a(b-c) = ab - ac$.
10. $ab = 0 \,.=.\, a = 0 \,.\cup.\, b = 0$. . . . . [v. P47]
11. $ab -= 0 \,.=.\, a -= 0 \,.\, b -= 0$.
12. $a = b \,.\supset.\, ac = bc$.
13. $ac = bc \,.\, c -= 0 \,.\supset.\, a = b$.
14. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, ab \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$.
15. $a > b \,.\, c \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset.\, ac > bc$.
16. $c \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, ac > bc \,.\supset.\, a > b$.
17. $\mathrm{mod}\,(ab) = (\mathrm{mod}\, a)\,(\mathrm{mod}\, b)$. . . . . . . [v. P48]
18. $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q} = \mathrm{Q}$.
19. $\mathrm{Q} \times (-\mathrm{Q}) = (-\mathrm{Q}) \times \mathrm{Q} = -\mathrm{Q}$.
20. $(-\mathrm{Q}) \times (-\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$.
21. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a -= 0 \,.\supset.\, /a \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.
22. » » $.\supset.\, /(/a) = a$.
23. » » $.\supset.\, a/a = 1$.
24. $a, b -= 0 \,.\supset.\, /(ab) = (/a)(/b)$.
25. $a -= 0 \,.\supset:\, ab = c \,.=.\, b = c/a$.
26. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, ab/b = a$.
27. » $.\supset.\, a/(a/b) = b$.
28. » $.\supset.\, a/(b/c) = ac/b$.
29. » $.\supset.\, a/b = ac/bc$.
30. $c -= 0 \,.\supset.\, (a+b)/c = a/c + b/c$.
31. $\mathrm{mod}\, /a = /\mathrm{mod}\, a$.

32. $a, b \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset : a > b \,.=.\, |a < |b \,.$
33. » $.\, a > b \,.=.\, a|b > 1 \,.$
34. $|-Q = -|Q = -Q \,.$
35. $b -= 0 \,.\, \supset \,.\, a|b = c + (a - bc)|b = c - (bc - a)|b \,.$
36. $a|b = c|d \,.=.\, a|c = b|d \,.$
37. » $.=.\, (a+b)|b = (c+d)|d \,.$
38. $a > b . \supset : a|b = c|d .=. (a-b)|b = (c-d)|d .=. (a+b)|(a-b) = (c+d)|(c-d) \,.$
39. $a|b = c|d = e|f \,.\, \supset \,.\, a|b = (a+c+e)|(b+d+f) \,.$
40. $a|b = d|e \,.\, b|c = e|f \,.\, \supset \,.\, a|c = d|f \,.$
41. $a|b = e|f \,.\, b|c = d|e \,.\, \supset \,.\, a|c = d|f \,.$
42. $a|b = c|d \,.\, e|b = f|d \,.\, \supset \,.\, (a+e)|b = (c+f)|d \,.$
43. $m \,\varepsilon\, N \,.\, f \,\varepsilon\, q|Z_m \,.\, \supset \,.\, \Pi_1^m f = \Pi_{r=1}^{r=m} fr = (f1) \times (f2) \times \ldots \times (fm)$ [Def.]
44. » » $.\, g \,\varepsilon\, (Z_m|Z_m)\, \mathrm{sim} \,.\, \supset \,.\, \Pi_{r=1}^{r=m} fr = \Pi_{r=1}^{r=m} f(gr)$
45. $m, m' \,\varepsilon\, N \,.\, f \,\varepsilon\, q|Z_{m+m'} \,.\, \supset \,.\, \Pi_{r=1}^{r=m+m'} fr = \Pi_{r=1}^{r=m} fr \times \Pi_{r=1}^{r=m'} f(m+r)$.
46. $m \,\varepsilon\, N \,.\, f \,\varepsilon\, q|Z_m \,.\, \supset \,.\, a \Sigma_{r=1}^{r=m} fr = \Sigma_{r=1}^{r=m} afr \,.$
47. » » $.\, \Pi_1^m f = 0 \,.\, \supset \,.\, 0 \,\varepsilon\, fZ_m \,.$
48. » » $.\, \supset \,.\, \mathrm{mod}\, \Pi_{r=1}^{r=m} fr = \Pi_{r=1}^{r=m} \mathrm{mod}\, fr \,.$

§ 3.

$a, b, c, d, a', \ldots d' \,\varepsilon\, q \,.\, \supset :$

1. $m \,\varepsilon\, N \,.\, \supset \,.\, a^m \,\varepsilon\, q \,.$
2. » $1^m = 1 \,.$
3. » $0^m = 0 \,.$
4. $a^1 = a \,.$
5. $a -= 0 \,.\, m \,\varepsilon\, -N \,.\, \supset \,.\, a^m = |a^{-m} \,.$ . . . . [Def.]
6. » $.\, \supset \,.\, a^0 = 1$ . . . . [Def.]

$m, n \,\varepsilon\, N \,.\, \supset :$

7. $a^m a^n = a^{m+n} \,.$
8. $(a^m)^n = a^{mn} \,.$
9. $(ab)^m = a^m b^m \,.$ . . . . [v. P18]

10. $a -= 0 . b -= 0 . m, n \varepsilon \mathrm{n} . \supset . \mathrm{P7} . \mathrm{P8} . \mathrm{P9}$.
11. $a -= 0 . m \varepsilon \mathrm{n} . \supset . (/a)^m = /a^m = a^{-m}$.
12. » $. \supset . \mathrm{mod}\, (a)^m = (\mathrm{mod}\, a)^m$.
13. » $. \supset . a^{2m} = (\mathrm{mod}\, a)^{2m}$.
14. $a \varepsilon -\mathrm{Q} . \supset . a^{2m+1} = -(\mathrm{mod}\, a)^{2m+1}$.
15. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . m \varepsilon \mathrm{N} . \supset : a \leqq b . = . a^m \leqq b^m$.
16. $a \varepsilon \mathrm{Q} . a > 1 . m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset : m < n . = . a^m < a^n$.
17. » $. a < 1 .$ » $. \supset : m < n . = . a^m > a^n$.
18. $m \varepsilon \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{q}|\mathrm{Z}_m . \supset . (\Pi_{r=1}^{r=m} fr)^m = \Pi_{r=1}^{r=m} (fr)^m$

§ 4.

1. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
2. $(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc)$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
5. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
6. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$
7. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$,
8. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
9. $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$.
10. $(a-b)(c-d) + (b-c)(a-d) + (c-a)(b-d) = 0$.
11. $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2 =$
$(-a+b+c+d)^2 + (a-b+c+d)^2 + (a+b-c+d)^2 + (a+b+c-d)^2 =$
$4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.
12. $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2[(a-b)(a-c) + (b-a)(b-c) + (c-a)(c-b)]$.
13. » » » $= 2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

21. $(a^2+ab+b^2)(a-b) = a^3 - b^3$.
22. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
23. » $= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.
24. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$.
25. » $= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$.
26. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)$.

27. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - a)(c - a)(c - b)$.

28. $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$.

29. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

30. $\qquad \text{»} \qquad = (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]/2$

31. $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(a + c)(b + c)$.

32. $\qquad \text{»} \qquad = 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc$

33. $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b)$
$+ c^2(a + b - c) - 2abc$.

34. $a + b + c = 0 \,.\, \supset \,.\, a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

35. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \,.\, \supset \,.\, a = b = c \,.\, \cup \,.\, a + b + c = 0$.

36. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.

40. $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$.

41. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

42. $(a + b + c)^4 = a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b)$
$+ 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab)$

43. $\qquad \text{»} \qquad = 2(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)^2 + 8abc(a + b + c)$
$+ 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$

44. $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

45. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = (a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$.

46. $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) -$
$(a^4 + b^4 + c^4)$.

47. $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2) = (aa'+bb')^2 + (ab'-a'b)^2 = (aa'-bb')^2 + (ab'+a'b)^2$.

48. $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

49. $(a^2 + cb^2)(a'^2 + cb'^2) = (aa' + cbb')^2 + c(ab' - a'b)^2$.

50. $\qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad = (aa' - cbb')^2 + c(ab' - a'b)^2$

51. $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2 = (ab'-a'b)^2 + (ac'-a'c)^2 +$
$(bc'-b'c)^2$.

52. $(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = (aa'+bb'+cc'+dd')^2 + (ab'-a'b+$
$cd'-c'd)^2 + (ac'-a'c+bd'-b'd)^2 + (ad'-a'd+bc'-b'c)^2$.

53. $a^2(a + b)^2 + a^2b^2 + (a + b)^2b^2 = (a^2 + ab + b^2)^2$.

54. $[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2 = 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4]$

55. $(a+b)^4 + (a+c)^4 + (b+c)^4 = (a+b+c)^4 + a^4 + b^4 + c^4 + 12abc(a+b+c)$

56. $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac - bd)^2 - (ad - bc)^2$.

57. $(a^2 + ab + b^2)^2 - (a^2 - ab + b^2)^2 = 4ab(a^2 + b^2)$.

58. $a(a-2b)^3 - b(b-2a)^3 = (a-b)(a+b)^3$.

59. $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^4 - 2ab + 2b^2)$.

60. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

61. $a^3(b^2-c^2) + b^3(c^2-a^2) + c^3(a^2-b^2) = (a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$.

62. $(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab\,(a+b)\,(a^2+ab+b^2)$.

63. $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a+b)\,(a^2+ab+b^2)^2$.

64. $a, b, c, d \varepsilon \mathrm{Q} . \supset : a/b = c/d .=. (a+b)^2/(c+d)^2 = (a^2+b^2)/(c^2+d^2)$.

65. $(a-c)/(c-b) = a/b .=. c = 2ab/(a+b) .=. /c = \frac{1}{2}(/a + /b)$.

§ 5.

1. $a \varepsilon \mathrm{q} . a -= 0 . \supset . a^2 > 0$.

2. $a, b, a', b' \varepsilon \mathrm{q} . a > b . a' > b' . \supset . aa' + bb' > ab' + a'b$.

[Hp. $\supset . (a-b)(a'-b') > 0 . \supset .$ Ts.]

3. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . a -= b . \supset . a^2 + b^2 > 2ab$. [Hp. $\supset . (a-b)^2 > 0 . \supset .$ Ts.]

4. $(a^2+ab+b^2)^2 < 3(a^4+a^2b^2+b^4)$.

[$3(a^4+a^2b^2+b^2) - (a^2+ab+b^2)^2 = 2(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$]

$a, b, c \varepsilon \mathrm{Q} . -(a=b=c) . \supset :$

11. $a^2+b^2+c^2 > ab+ac+bc$.

[Hp. $\supset . (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 > 0 . \supset .$ Ts.]

12. $(a+b+c)^2 < 3(a^2+b^2+c^2)$.

13. $(a+b-c)^2 + (a+c-b)^2 + (b+c-a)^2 > ab+bc+ca$.

14. $abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

15. $2(a^3+b^3+c^3) > ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) > 6abc$.

16. $(a+b)(b+c)(c+a) > 8abc$.

17. $3(a^3+b^3+c^3) > (a+b+c)(ab+bc+ca)$.

18. $9abc < (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$.

19. $8(a^3+b^3+c^3) > 3(a+b)(b+c)(c+a)$.

20. $27abc < (a+b+c)^3 < 9(a^3+b^3+c^3)$.

21. $a, b, c \varepsilon \mathrm{Q} . a < b < c . a+b > c . \supset . 2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$.

22. $a>b>c . \cup . b>c>a . \cup . c>a>b . \supset . a^2b+b^2c+c^2a < a^2c+b^2a+c^2b$.

23. $a^4+b^4+c^4 > abc(a+b+c)$.

24. $a/b = c/d \,.\, a > b \,.\, a > c \,.\supset .\, a + d > b + c$.

25. $a/b < c/d \,.\supset .\, \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

26. $a/(a+b) < (a+c)/(a+b+c)$

27. $a -= b \,.\supset .\, \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 < ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)$.

§ 6.

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, m, n, m', n' \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset :$

1. $\sqrt[m]{a} \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$.

2. $(\sqrt[m]{a})^m = \sqrt[m]{a^m} = a$.

3. $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$. $\quad \sqrt[1]{a} = a$.

4. $\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$.

5. $\sqrt[m]{/a} = /\sqrt[m]{a}$.

6. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

8. $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \,.\supset .\, \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m']{a^{n'}}$.

11. $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

12. $\sqrt{a+b} > \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt[4]{\frac{ab}{4}}$

$$\left[\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{a+b} = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}} < \frac{2\sqrt{ab}}{2\sqrt{a+b}} < \sqrt{\frac{ab}{2\sqrt{ab}}}\right]$$

13. $a -= b \,.\supset .\, \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. $\quad$ [Hp. $\supset . (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0 \,.\supset .$ Ts.]

14. $a > b \,.\supset .\, \sqrt{ab} + \frac{(a-b)^2}{8b} > \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} + \frac{(a-b)^2}{8a}$

21. $a, b, a', b' \varepsilon \mathrm{R} . b - \varepsilon \mathrm{R}^2 . a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'} . \supset . a = a' . b = b'$.

22. $a > \sqrt{b} . \supset . \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$.

23. » $. \supset . \sqrt{a - \sqrt{b}} =$ » — ».

24. $\left[\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4 b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2 b^4}}\right]^2 = [\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}]^3$.

25. $b \leqq 8a . \supset . \sqrt[3]{a + (b + a)\sqrt{\frac{8a - b}{27b}}} + \sqrt[3]{a - (b + a)\sqrt{\frac{8a - b}{27b}}} = \sqrt[3]{b}$.

26. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \quad b \leqq a . \supset . \sqrt[4]{\frac{2a - b + 2\sqrt{a(a - b)}}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2a - b - 2\sqrt{a(a - b)}}{4}}$
$= \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

§ 7.

1. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . x \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . a^x \,\varepsilon\, \mathrm{Q}$.
2. » $. x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . a^{x+y} = a^x a^y$.
3. » » $. \supset . (a^x)^y = a^{xy}$.
4. » $. \supset . a^0 = 1$.
5. » $. \supset . a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
6. » $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
7. $a > 1 . \supset : x < y . = . a^x < a^y$.
8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m > 1 . \supset . (1 + a)^m > 1 + ma$.
9. » » $. m < 1 . \supset . (1 + a)^m < 1 + ma . \left[\begin{pmatrix} 1/m, & ma \\ m, & a \end{pmatrix} \mathrm{P8} \supset \mathrm{P9}\right]$
10. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m, n \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m > n . \supset . \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n . \left[\begin{pmatrix} m/n, & a/m \\ m, & a \end{pmatrix} \mathrm{P8} \supset \mathrm{P10}\right]$
11. $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m > n . \supset . \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mathrm{P10} \supset \mathrm{P11}\right]$
12. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . m \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset . (1 + a)^m > 1 + \frac{ma}{1 + a}$.
[Hp. P8 $. \supset . (1 + a)^{m+1} > 1 + a + ma . \supset .$ Ts.]
13. $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . \supset . \left(\frac{m + 1}{m}\right)^m < \left(\frac{n + 1}{n}\right)^{n+1} . \left[\begin{pmatrix} 1/n, & (n + 1)/m \\ a, & m \end{pmatrix} \mathrm{P12} \supset \mathrm{P13}\right]$

21. $a \varepsilon \mathrm{Q} . a -= 1 . x \varepsilon \mathrm{Q} . y \varepsilon \mathrm{q} . \supset : y = \mathrm{Log}_a x . = a^y = x .$

22. $a \varepsilon \mathrm{Q} . a -= 1 . x \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Log}_a x \varepsilon \mathrm{q} .$

23. » » $. \supset . a^{\mathrm{Log}_a x} = x .$

24. » $. x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \mathrm{Log}_a a^x = x .$

25. $a, b \varepsilon \mathrm{Q} . a -= 1 . b -= 1 . x \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Log}_a x = \mathrm{Log}_b x \times \mathrm{Log}_a b .$

26. » » » $. \supset . 1 = \mathrm{Log}_a b \, \mathrm{Log}_b a$

$a \varepsilon \mathrm{Q} . a -= 1 . \mathrm{Log}\, x = \mathrm{Log}_a x . \supset :$

27. $\mathrm{Log}\, 1 = 0$

28. $\mathrm{Log}\, a = 1 .$

29. $x, y \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Log}\,(xy) = \mathrm{Log}\, x + \mathrm{Log}\, y .$

30. » $\mathrm{Log}\, \frac{x}{y} = \mathrm{Log}\, x - \mathrm{Log}\, y .$

31. $x \varepsilon \mathrm{Q} . m \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \mathrm{Log}\, x^m = m \, \mathrm{Log}\, x .$

§ 8.

$a, b, c, d, a', b', p, q, x, y, z \varepsilon \mathrm{q} . \supset :$

1. $x + a = b . = . x = b - a .$

2. $a -= 0 . \supset : ax = b . = . x = b/a .$

3. $a = 0 . b -= 0 . \supset : ax = b . =_x . \Lambda$

4. $a = 0 . b = 0 . \supset . ax = b .$

5. $ax + b = a'x + b' . = . (a - a')x = b' - b .$

6. $x + y = a . x - y = b . = . x = (a + b)/2 . y = (a - b)/2 .$

7. $p, q, p+q -= 0 . \supset : x + y = a . x/p = y/q . = . x = pa/(p+q) . y = qa/(p+q) .$

8. $y + z = a . z + x = b . x + y = c . = . x = (b + c - a)/2 . y = (a +$
$c - b)/2 . z = (a + b - c)/2 .$

9. $y + z - x = a . z + x - y = b . x + y - z = c . = . x = (b + c)/2 . y = \ldots$

10. $ab' - a'b -= 0 . \supset : ax + by = c . a'x + b'y = c' . = . x = (cb' - c'b)/(ab' - a'b) .$
$y = (ac' - a'c)/(ab' - a'b) .$

11. $x, y \varepsilon \mathrm{q} . -(x = 0 . y = 0) . ax + by = 0 . a'x + b'y = 0 . -=_{x,y} \Lambda : = : ab' - a'b = 0 .$

12. $(a-b)(a-c)(b-c) -= 0 . \supset : x + y + z = 1 . ax + by + cz = d . a^2x + b^2y +$
$c^2z = d^2 . = . x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} . y = \ldots$

13. $abc -= 0 . \supset : xy = a^2 . yz = b^2 . zx = c^2 . = . x = \frac{ac}{\pm b} . y = \frac{ab}{\pm c} . z = \frac{bc}{\pm a} .$

20. $\begin{cases} x^2 = a^2 \,.=.\, x = a \,.\cup.\, x = -a \,. \\ \quad » \qquad =.\, x = \pm a \,. \end{cases}$

21. $\begin{cases} a > 0 \,.\supset: x^2 = a \,.=.\, x = \pm\sqrt{a} \,. \\ a = 0 \,.\supset: x^2 = a \,.=.\, x = 0 \,. \\ a < 0 \,.\supset: x^2 = a \,.=_x \Lambda \,. \end{cases}$

22. $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \,.$

23. $\begin{cases} \frac{p^2}{4} - q > 0 \,.\supset: x^2 + px + q = 0 \,.=.\, x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \,. \\ \quad » \quad = 0 \,.\supset: \qquad » \qquad =.\, x = -\frac{p}{2} \,. \\ \quad » \quad < 0 \,.\supset: \qquad » \qquad =_x \Lambda \,. \end{cases}$

24. $\begin{cases} a -= 0 \,.\, b^2 - ac > 0 \,.\supset: ax^2 + 2bx + c = 0 \,.=.\, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \,. \\ \quad » \quad » \quad = 0 \,.\supset: \qquad » \qquad =.\, x = -\frac{b}{a} \,. \\ \quad » \quad » \quad < 0 \,.\supset: \qquad » \qquad =_x \Lambda \,. \end{cases}$

25. $x + y = a \,.\, xy = b \,.=.\, x + y = a \,.\, (x - y)^2 = a^2 - 4b \,.$

26. $x + y = a \,.\, x^2 + y^2 = b^2 \,.=.\, x + y = a \,.\, 2xy = a^2 - b^2 .$

27. $x + y = a \,.\, x^2 - y^2 = b \,.=.\, x + y = a \,.\, a(x - y) = b \,.$

28. $x^2 + y^2 = a \,.\, xy = b \,.=.\, (x + y)^2 = a + 2b \,.\, (x - y)^2 = a - 2b \,.$

29. $x^3 + y^3 = a \,.\, x + y = b \,.=.\, x + y = b \,.\, xy = \frac{b^3 - a}{3b} \,.$

30. $x^4 + y^4 = a \,.\, x + y = b \,.=.\, x + y = b \,.\, 2x^2y^2 - 4b^2xy + b^4 - a = 0 .$

31. $x^5 + y^5 = a \,.\, x + y = b \,.=.\, x + y = b \,.\, 5bxy(b^2 - xy) = b^5 - a \,.$

§ 9.

1. $\mathrm{i} \,\varepsilon\, \mathrm{q}'$.
2. $\mathrm{i}^2 = -1$
3. $\mathrm{q}' = \mathrm{q} + \mathrm{iq} \,.$
4. $x, y, x', y' \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset: x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \,.=.\, x = x' \,.\, y = y'$.
5. $\quad » \qquad .\supset.\, (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y') \,.$
6. $\quad » \qquad .\supset.\, (x + \mathrm{i}y)\,(x' + \mathrm{i}y') = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y) \,.$
7. $x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset.\, \mathrm{mod}\, (x + \mathrm{i}y) = \sqrt{x^2 + y^2} \,.$
8. $\quad » \quad .\, x^2 + y^2 -= 0 \,.\supset.\, /(x + \mathrm{i}y) = (x - \mathrm{i}y)/(x^2 + y^2) \,.$
9. $\mathrm{q} \supset \mathrm{q}'$.

10. $\binom{q'}{q}$ [§1P1-20, 28-30, 41, 44, 45, 53-55; §2P1-13, 17, 21-31, 35-48; §3 P1-13, 18; §4P1-34, 36-63; §8P1-13, 25-31].

11. $a \varepsilon q' . m \varepsilon N . \supset . \sqrt[m]{{}^*a} = q' \cap \overline{x \varepsilon} (x^m = a)$. [Def.]

12. $\sqrt[m]{{}^*0} = 0$.

12'. $a \varepsilon q' . a - = 0 . m \varepsilon N . \supset . \text{num} \sqrt[m]{{}^*a} = m$.

13. $a \varepsilon Q . \supset . \sqrt[m]{{}^*a} = \sqrt[m]{a} \sqrt[m]{{}^*1}$.

14. $a \varepsilon - Q . \supset . \sqrt[m]{{}^*a} = \sqrt[m]{(\text{mod}\, a)} \sqrt[m]{{}^*(-1)}$.

15. $\sqrt{{}^*1} = 1, -1 . \sqrt{{}^*(-1)} = i, -i$.

16. $\sqrt[3]{{}^*1} = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

17. $1 n \varepsilon N . \supset . \sqrt[2n+1]{{}^*(-1)} = - \sqrt[2n+1]{{}^*1}$

18. $\sqrt[4]{{}^*1} = 1, -1, i, -i$

19. $\sqrt[4]{{}^*(-1)} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$

20. $\sqrt[5]{{}^*1} = 1, \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

21. $\sqrt[6]{{}^*1} = \sqrt[3]{{}^*1} \cup \sqrt[3]{{}^*-1}$

22. $\sqrt[6]{{}^*(-1)} = \pm i, \frac{\pm\sqrt{3} \pm i}{2}$

23. $x \varepsilon q . y \varepsilon Q . \supset . \sqrt{{}^*(x + iy)} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}} \right)$

24. » $\sqrt{{}^*(x - iy)} = \pm$ » — . »

25. $a - = 0 . \supset : ax^2 + bx + c = 0 . = . x = \frac{-b + \sqrt{{}^*b^2 - 4ac}}{2a}$.

26. » $. \supset : ax^4 + bx^2 + c = 0 . = . x = \sqrt{{}^*\frac{-b + \sqrt{{}^*b^2 - 4ac}}{2a}}$.

§ 10.

$a, b, c, x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \mathsf{O}:$

1. $x -= 1 \,.\, \mathsf{O} \,.\, \sum_{r=0}^{r=m} ax^r = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^m = a \dfrac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$.

2. $a -= b \,.\, \mathsf{O} \,.\, \sum_{r=0}^{r=m} a^{m-r} b^r = a^m + a^{m-1} b + \ldots + b^m = \dfrac{a^{m+1} - b^{m+1}}{a - b}$.

3. $(a+b)^m = \Sigma_{r=0}^{r=m} \dfrac{m!}{r!\,(m-r)!} a^{m-r} b^r$.

$$= a^m + ma^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \ldots + mab^{m-1} + b^m .$$

4. $(a+b+c)^m = \Sigma_{r=0}^{r=m} \Sigma_{s=0}^{s=m-r} \dfrac{m!}{r!\,s!\,(m-r-s)!} a^r b^s c^{m-r-s}$.

5. $\sum_{r=1}^{r=m} r = 1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$.

6. $\Sigma\, r^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 = m(m+1)(2m+1)/6$

7. $\Sigma\, r^3 = m^2(m+1)^2/4 = (\Sigma\, r)^2$.

8. $\Sigma\, r^4 = m^5/5 + m^4/2 + m^3/3 - m/30$.

9. $\Sigma\, r^5 = m^6/6 + m^5/2 + 5m^4/12 - m/12$. etc.

10. $\Sigma_{r=1}^{r=m} r(r+1) = m(m+1)(m+2)/3$.

11. $\Sigma\, r(r+1)(r+2) = m(m+1)(m+2)(m+3)/4$.

12. $\Sigma_{r=1}^{r=m} \Pi_{s=0}^{s=n} (r+s) = [\Pi_{s=0}^{s=n+1} (m+s)]/(n+2)$.

13. $\Sigma_{r=0}^{r=n-1} (a+br) = na + \dfrac{n(n-1)}{2} b$.

14. $\Sigma_{r=0}^{r=n-1} (2r+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n, m \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \mathsf{O}:$

15. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n \sqrt[n]{x_1\, x_2 \ldots x_n}$

16. $\dfrac{n-1}{2} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \geqq \sqrt{x_1\, x_2} + \sqrt{x_1\, x_3} + \sqrt{x_2\, x_3} + \ldots + \sqrt{x_{n-1}\, x_n}$

17. $x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n \leqq \sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}$

18. $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n \leqq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$

19. $1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1) \leqq n^n$

20. $\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{y_1}\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{y_2}\cdots\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{y_n}\leqq\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^{y_1+y_2+\ldots+y_n}$

21. $x_1^{x_1}x_2^{x_2}\ldots x_n^{x_n}\leqq\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{x_1+x_2+\ldots+x_n}$

22. $x_1^{x_1y_1}x_2^{x_2y_2}\ldots x_n^{x_ny_n}\geqq\left(\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\right)^{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}$

23. $m>1$. o: $\frac{y_1x_1^m+y_2x_2^m+\ldots+y_nx_n^m}{y_1+y_2+\ldots+y_n}\geqq\left(\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{y_1+y_2\ldots+y_n}\right)^m$

24. $m<1$. o: » $\leqq$ »

III.

§ 1.

$a, b, c, k \varepsilon \mathrm{n} . \supset :$

1. $0 \varepsilon \mathrm{n} a .$
2. $a \varepsilon \mathrm{n} \times 1 .$
3. $a \varepsilon \mathrm{n} a .$
4. $ab \varepsilon \mathrm{n} a .$
5. $a \varepsilon \mathrm{n} b . b \varepsilon \mathrm{n} a . = . a = \pm b .$
6. $a \varepsilon \mathrm{n} b . b \varepsilon \mathrm{n} c . \supset . a \varepsilon \mathrm{n} c .$
7. $a, b \varepsilon \mathrm{n} c . \supset . a + b, a - b \varepsilon \mathrm{n} c .$
8. $a \varepsilon \mathrm{n} b . \supset . ac \varepsilon \mathrm{n} bc .$
9. » $. \supset . ac \varepsilon \mathrm{n} b .$
10. $a \varepsilon b + \mathrm{n} k . b \varepsilon c + \mathrm{n} k . \supset . a \varepsilon c + \mathrm{n} k .$
11. » $. a' \varepsilon b' + \mathrm{n} k . \supset . a + a' \varepsilon b + b' + \mathrm{n} k .$
12. » $. \supset . ca \varepsilon cb + \mathrm{n} k .$
13. » $. a' \varepsilon b' + \mathrm{n} k . \supset . aa' = bb' + \mathrm{n} k .$
14. » $. \supset . a^m \varepsilon b^m + \mathrm{n} k .$
15. $ca \varepsilon cb + \mathrm{n} ck . \supset . a \varepsilon b + \mathrm{n} k .$

20. $a + b \varepsilon 2\mathrm{n} . = . a - b \varepsilon 2\mathrm{n} . = . a, b \varepsilon 2\mathrm{n} . \cup . a, b \varepsilon 2\mathrm{n} + 1 .$
21. $a(a+1) \varepsilon 2\mathrm{n} .$
22. $a(a+1)(a+2) \varepsilon 6\mathrm{n} .$
23. $a(a+1)(2a+1) \varepsilon 6\mathrm{n} .$
24. $a(2a+1)(7a+1) \varepsilon 6\mathrm{n} .$
25. $(2a+1)^2 - 1 \varepsilon 8\mathrm{n} .$

26. $a, b \,\varepsilon\, 2\mathrm{n}+1 \,.\supset.\, a^2 - b^2 \,\varepsilon\, 8\mathrm{n}$.

27. $ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) \,\varepsilon\, 30\mathrm{n}$.

28. $a \,\varepsilon\, \mathrm{n}\, b \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a^m \,\varepsilon\, \mathrm{n}\, b^m$.

29. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a^m \,\varepsilon\, \mathrm{n}\, b^m \,.\supset.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{n}\, b$.

30. $0! = 1$. } [Def.]

31. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a! = \Pi_{r=1}^{r=a}\, r = 1 \times 2 \times \ldots \times r$. }

32. $(a+b)! \,\varepsilon\, \mathrm{N}\,(a!)(b!) \,.\, (a+b+c)! \,\varepsilon\, \mathrm{N}\,(a!)(b!)(c!)$.

33. $m \,\varepsilon\, 1+\mathrm{N} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{N}|\mathrm{Z}_m \,.\supset.\, (\Sigma_{r=1}^{r=m} fr)! \,\varepsilon\, \mathrm{N}\, \Pi_{r=1}^{r=m} [(fr)!]$.

34. $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \iota 0$. [Def.]

§ 2.

$a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset:$

1. $\mathrm{quot}\,(a, b) = \max\,[(\mathrm{N}_0) \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(xb \leq a)]$ [Def.]
2. $a < b \,.=:\, \mathrm{quot}\,(a, b) = 0$.
3. $a \geq b \,.=.\, \mathrm{quot}\,(a, b) \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}\, b \,.\supset.\, \mathrm{quot}\,(a, b) = a/b$.
5. $\mathrm{rest}\,(a, b) = a - b\, \mathrm{quot}\,(a, b)$ [Def.]
6. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}\, b \,.=.\, \mathrm{rest}\,(a, b) = 0$.
7. $a -\varepsilon\, \mathrm{N}\, b \,.=.\, \mathrm{rest}\,(a, b) \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
8. $\mathrm{rest}\,(a, b) < b$.
9. $q, r \,\varepsilon\, \mathrm{N}_0 \,.\, a = bq + r \,.\, r < b \,.\supset.\, q = \mathrm{quot}\,(a, b) \,.\, r = \mathrm{rest}\,(a, b)$.
10. $\mathrm{quot}\,(ac, bc) = \mathrm{quot}\,(a, b)$.
11. $\mathrm{rest}\,(ac, bc) = c \times \mathrm{rest}\,(a, b)$.
12. $\mathrm{rest}\,(a + bc, b) = \mathrm{rest}\,(a, b)$.
13. $\mathrm{quot}\,(a, b) \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, a > 2\, \mathrm{rest}\,(a, b)$.
14. $a > b \,.\supset.\, \mathrm{quot}\,(a, c) \geqq \mathrm{quot}\,(b, c)$
15. $b > c \,.\supset.\, \mathrm{quot}\,(a, b) \leqq \mathrm{quot}\,(a, c)$
16. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}c \,.\supset.\, \mathrm{quot}\,(a + b, c) = \mathrm{quot}\,(a, c) + \mathrm{quot}\,(b, c)$.
17. $\mathrm{quot}\,\{\mathrm{quot}\,(a, b), c\} = \mathrm{quot}\,(a, bc)$.
18. $\mathrm{rest}\,(a, b) < \mathrm{quot}\,(a, b) \,.=:\, \mathrm{quot}\,[a, \mathrm{quot}\,(a, b)] = b \,.\, \mathrm{rest}\,[a, \mathrm{quot}\,(a, b)]$
    $= \mathrm{rest}\,(a, b)$.
19. $\mathrm{rest}\,(a, b) = b - 1 \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{rest}\,(a^{2m}, b) = 1 \,.\, \mathrm{rest}\,(a^{2m-1}, b) = b - 1$.
20. $a - b \,\varepsilon\, \mathrm{N}\, c \,.=.\, \mathrm{rest}\,(a, c) = \mathrm{rest}\,(b, c)$.

§ 3.

$a, b, c, d \varepsilon \mathrm{N} . \supset :$

1. $\mathrm{D}(a, b) = \max (a/\mathrm{N} \frown b/\mathrm{N})$. [Def.]

1'. $m \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_m . \supset . \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_m) = \max[(f1)/\mathrm{N} \frown (f2)/\mathrm{N} \frown \ldots \frown (fm)/\mathrm{N}]$ [Def.]

2. $\mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(b, a)$.

2'. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_n . g \varepsilon (\mathrm{Z}_n/\mathrm{Z}_n) \operatorname{sim} . \supset . \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n) = \mathrm{D}(f(g\mathrm{Z}_n))$

3. $\mathrm{D}(a, 0) = \mathrm{D}(0, a) = a$.

4. $\mathrm{D}(a, -b) = \mathrm{D}(-a, b) = \mathrm{D}(-a, -b) = \mathrm{D}(a, b)$. } [Def.]

5. $\mathrm{D}(a, a) = a$.

6. $a \varepsilon \mathrm{N} b . \supset . \mathrm{D}(a, b) = b$.

7. $a > b . \supset . \mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(b, a - b)$.

8. » $. \supset . \mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(b, \operatorname{rest}(a, b))$.

8'. $\mathrm{D}(a, a + 1) = 1$.

9. $a, b \varepsilon \mathrm{N} c . \supset . \mathrm{D}(a, b) \varepsilon \mathrm{N} c$.

9'. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon (\mathrm{N}a)/\mathrm{Z}_n . \supset . \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n) \varepsilon \mathrm{N}a$

10. $\mathrm{D}(ac, bc) = c\mathrm{D}(a, b)$.

10'. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . \mathrm{D}(ac, bc) = c$.

11. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . = . (1 + \mathrm{N}) \frown (a/\mathrm{N}) \frown (b/\mathrm{N}) = \Lambda$.

12. $\mathrm{D}(a/\mathrm{D}(a, b), b/\mathrm{D}(a, b)) = 1$.

12'. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_n . \supset .\!\cdot.\; a = \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n) . =: (f\mathrm{Z}_n)/a \varepsilon \mathrm{KN} . \mathrm{D}((f\mathrm{Z}_n)/a) = 1$

13. $\mathrm{D}(a, b, c) = \mathrm{D}(\mathrm{D}(a, b), c)$.

14. $a \varepsilon 2\mathrm{N} . b \varepsilon 2\mathrm{N} + 1 . \supset . \mathrm{D}(a + b, a - b) = \mathrm{D}(a, b)$.

15. $a, b \varepsilon 2\mathrm{N} + 1 . \supset . \mathrm{D}(a + b, a - b) = 2\mathrm{D}(a, b)$.

16. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{D}(a, b) = 1 . = . \mathrm{D}(a^m, b^n) = 1$.

17. $ab \varepsilon \mathrm{N} c . \mathrm{D}(a, c) = 1 . \supset . b \varepsilon \mathrm{N} c$.

18. $\mathrm{D}(a, c) = 1 . \supset . \mathrm{D}(ab, c) = \mathrm{D}(b, c)$.

19. $\mathrm{D}(a, c) = 1 . \mathrm{D}(b, c) = 1 . = . \mathrm{D}(ab, c) = 1$.

19'. $\mathrm{D}(a, c) = \mathrm{D}(b, c) = \mathrm{D}(a, d) = \mathrm{D}(b, d) = 1 . \supset . \mathrm{D}(ab, cd) = 1$.

20. $m \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_m . \supset .\!\cdot.\; \mathrm{D}(a, \Pi_1^m f) = 1 . =: r \varepsilon \mathrm{Z}_m . \supset_r . \mathrm{D}(a, fr) = 1$.

21. $a \varepsilon \mathrm{N}b . a \varepsilon \mathrm{N}c . \mathrm{D}(b, c) = 1 . \supset . a \varepsilon \mathrm{N}bc$.

22. $m \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_m : s, t \varepsilon \mathrm{Z}_m . s -= t . \supset_{s,t} . fs \varepsilon a/\mathrm{N} . \mathrm{D}(fs, ft) = 1 :$
$\supset .\!\cdot.\; a \varepsilon \mathrm{N}(\Pi_1^m f)$.

23. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . \mathrm{N} \frown \overline{x \varepsilon} (\mathrm{D}(a, x)\, \mathrm{D}(b, x) = x) = \mathrm{N} \frown (ab)/\mathrm{N}$.

24. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . \mathrm{N} \frown (ab)/\mathrm{N} = (\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \times (\mathrm{N} \frown b/\mathrm{N})$.

25. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_n . \supset . \mathrm{N} \frown (f1)/\mathrm{N} \frown \ldots \frown (fn)/\mathrm{N} = \mathrm{N} \frown (\mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n))/\mathrm{N}$

§ 4.

$a, b, c \varepsilon N . \supset :$

1. $m(a, b) = \min (a \times N \cap b \times N)$ . . . . [Def.]

1'. $m \varepsilon 1 + N . f \varepsilon N|Z_m . \supset . m(fZ_m) = \min [(f1) \times N \cap (f2) \times N \cap \ldots\ldots \cap (fm) \times N]$ . . . . [Def.]

2. $m(a, a) = a$.

3. $m(a, b) = m(b, a)$

3'. $n \varepsilon 1 + N . f \varepsilon N|Z_n . g \varepsilon (Z_n|Z_n) \text{sim} . \supset . m(fZ_n) = m\big(f(gZ_n)\big)$.

4. $a \varepsilon Nb . \supset . m(a, b) = a$.

5. $m(a, b) = ab/D(a, b)$.

6. $D(a, b) = 1 . \supset . m(a, b) = ab$.

7. $n \varepsilon 1 + N . f \varepsilon N|Z_n : r, s \varepsilon Z_n . \supset_{r,s} . D(fr, fs) = 1 : \supset . m(fZ_n) = \Pi_1^n f$.

8. $c \varepsilon Na . c \varepsilon Nb . \supset . c \varepsilon Nm(a, b)$.

9. $Na \cap Nb \cap Nc = Nm(a, b, c)$.

10. $n \varepsilon 1 + N . f \varepsilon N|Z_n . \supset . (f1) \times N \cap \ldots \cap (fn) \times N = \big(m(fZ_n)\big) \times N$.

11. $m(a, b, c) = m(m(a, b), c)$.

12. $m(a, b, c) = abcD(a, b, c) / [D(a, b)D(a, c)D(b, c)]$.

§ 5.

1. $Np = (1 + N) \cap \overline{x \varepsilon} [(1 + N) \cap (x/(1 + N)) = \Lambda]$. [Def.]

2. $2, 3, 5, 7, 11, \ldots \varepsilon Np$.

3. $a \varepsilon 1 + N . \supset . \min [(1 + N) \cap (a/N)] \varepsilon Np$.

4. » $. \supset . Np \cap (a/N) -= \Lambda$.

5. » $: x \varepsilon 1 + N . x^2 \leqq a . x \varepsilon a/N . =_x \Lambda .\therefore \supset . a \varepsilon Np$.

5'. » $\therefore$ $x \varepsilon Np$. » » » »

6. $b \varepsilon Np . a - \varepsilon Nb . \supset . D(a, b) = 1$.

7. » $. a < b . \supset . D(a, b) = 1$.

8. $a, b \varepsilon Np . a -= b . \supset . D(a, b) = 1$.

9. $a \varepsilon Np . bc \varepsilon Na . \supset . b \varepsilon Na . \cup . c \varepsilon Na$.

10. » $. n \varepsilon N . b^n \varepsilon Na . \supset . b \varepsilon Na$.

11. » » $. a^n \varepsilon Nb . \supset . b \varepsilon a^N$.

12. $a \varepsilon Np . b - \varepsilon Na . \supset . b^{a-1} - 1 \varepsilon Na$.

13. » $. \supset . (a - 1)! + 1 \varepsilon Na$.

14. $a \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \supset . \min \{(1+\mathrm{N}) \cap (a! + 1)/\mathrm{N}\} \varepsilon \mathrm{Np} \cap (a + \mathrm{N})$.
15. $\max \mathrm{Np} = \Lambda$.
16. $\mathrm{num}\, \mathrm{Np} = \infty$.
17. $x \varepsilon \mathrm{N} . x < 17 . \supset . x^2 - x + 17 \varepsilon \mathrm{Np}$.
18. » $. x < 41 . \supset . x^2 - x + 41 \varepsilon \mathrm{Np}$.
19. $a, b \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \supset . \mathrm{mp}(b, a) = \max (\mathrm{N}_0 \cap \overline{x \varepsilon} (a \varepsilon \mathrm{N} b^x))$ [Def.]
20. » $. \supset . \mathrm{mp}(b, a) \varepsilon \mathrm{N}_0$.
21. » $c \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{D}(b, c) = 1 . \supset . \mathrm{mp}(b, a) = \mathrm{mp}(b, ac)$.
22. $a \varepsilon 1 + \mathrm{N} . b \varepsilon \mathrm{Np} \cap a/\mathrm{N} . \supset . \mathrm{D}(a/b^{\mathrm{mp}(b,\, a)}, b) = 1$.
24. $a, b \varepsilon \mathrm{N} . \supset .\!\cdot\!. a \varepsilon \mathrm{N}b . = : x \varepsilon \mathrm{Np} . \supset_x . \mathrm{mp}(x, b) \leq \mathrm{mp}(x, a)$.
25. $a \varepsilon 1 + \mathrm{N} . (a-1)! + 1 \varepsilon \mathrm{N}a . \supset . a \varepsilon \mathrm{Np}$.
25′. $n, a \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon (\mathrm{Np} \mid \mathrm{Z}_n) \mathrm{sim} . f\mathrm{Z}_n = \mathrm{Np} \cap a \mid \mathrm{N} . s \varepsilon \mathrm{Z}_{n-1} . \supset . \mathrm{Np} \cap \left[a/\Pi_{r=1}^{r=s} (fr)^{\mathrm{mp}(fr,\, a)}\right]/\mathrm{N} = f\mathrm{Z}(s+1, n)$

31. $u \varepsilon \mathrm{KN} . f \varepsilon (u/\mathrm{Z}_{\mathrm{num}\, u}) \mathrm{sim} . \supset . \Sigma u = \Sigma_{r=1}^{r=n} fr$
32. » $. \supset . \Pi u = \Pi_{r=1}^{r=n} fr$
33. $n \varepsilon (\mathrm{N} \cup \iota \infty) . f \varepsilon (\mathrm{N}/\mathrm{Z}_n) \mathrm{sim} . \supset . \Sigma_r fr = \Sigma_{r=1}^{r=n} fr$
34. » $. \supset . \Pi_r fr = \Pi_{r=1}^{r=n} fr$ [Def.]

31′. $u \varepsilon \mathrm{K(KN)} . f \varepsilon (u/\mathrm{Z}_{\mathrm{num}\, u}) \mathrm{sim} . \supset . \Sigma u = \Sigma_{r=1}^{r=n} fr$
32′. » $. \supset . \Pi u = \Pi_{r=1}^{r=n} fr$
33′. $n \varepsilon (\mathrm{N} \cup \iota \infty) . f \varepsilon ((\mathrm{KN})/\mathrm{Z}_n) \mathrm{sim} . \supset . \Sigma_r fr = \Sigma_{r=1}^{r=n} fr$
34′. » $. \supset . \Pi_r fr = \Pi_{r=1}^{r=n} fr$ [Def.]

35. $u \varepsilon \mathrm{KN} . \supset . \min_1 u = \min u$
36. » $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \min_{n+1} u = \min (u \cap (\min_n u + \mathrm{N}))$ [Def.]
37. » » $. \supset . u_n = \min_n u$
38. $(\mathrm{Np})_1 = 2 . (\mathrm{Np})_2 = 3 . (\mathrm{Np})_3 = 5 . (\mathrm{Np})_4 = 7 . (\mathrm{Np})_5 = 11$ ...
39. $a \varepsilon \mathrm{N} + 1 . \supset : \mathrm{mp}(x, a) = 0 . = . x - \varepsilon\, a/\mathrm{N}$.

41. $a \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \supset . a = \Pi_r \left[(\mathrm{Np})_r^{\mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r,\, a)} \right]$
42. » $. \supset . \mathrm{N} \cap a/\mathrm{N} = \Pi_r \left[(\mathrm{Np})_r^{\mathrm{Z}(0,\, \mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r,\, a))} \right]$

43. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{N}/\mathrm{Z}_n . \supset . \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n) = \Pi_r\left[(\mathrm{Np})_r^{\min\{\mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r, f\mathrm{Z}_n)\}}\right]$

44. » $. \supset . \mathrm{m}(f\mathrm{Z}_n) = \Pi_r\left[(\mathrm{Np})_r^{\max\{\mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r, f\mathrm{Z}_n)\}}\right]$

45. » $. \supset : \mathrm{D}(f\mathrm{Z}_n) = 1 . = . \mathrm{Np} \frown (f1)/\mathrm{N} \frown \ldots \frown (fn)/\mathrm{N} = \Lambda .$

§ 6.

$a, b, c \varepsilon \mathrm{N} . \supset :$

1. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) = \Pi_r[\mathrm{mp}((\mathrm{Np})_r, a) + 1]$
2. $a \varepsilon \mathrm{N}^2 . = . \mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \varepsilon 2\mathrm{N} + 1$
3. $a \varepsilon \mathrm{N}^2 : = : b \varepsilon \mathrm{Np} \frown a/\mathrm{N} . \supset_b . \mathrm{mp}(b, a) \varepsilon 2\mathrm{N}$
4. $[\Pi(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})]^2 = a^{\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})}$
5. $\mathrm{num}\left[\overline{(x, y) \varepsilon}(x, y \varepsilon \mathrm{N} . xy = a . \mathrm{D}(x, y) = 1 . x < y)\right] = a^{\mathrm{num}\,(\mathrm{Np} \frown a/\mathrm{N}) - 1}$
6. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \varepsilon 2\mathrm{N} . \supset . \mathrm{num}\left[\overline{(x, y) \varepsilon}(x, y \varepsilon \mathrm{N} . xy = a) . x < y)\right] =$ $(\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}))/2$
7. $\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \varepsilon 2\mathrm{N} + 1 . \supset . \mathrm{num}\left[\overline{(x, y) \varepsilon}(x, y \varepsilon \mathrm{N} . xy = a . x \leqq y)\right] =$ $(\mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) + 1)/2 .$
8. $n = \mathrm{num}\,(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) . r \varepsilon \mathrm{Z}_n . \supset . (\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_r \times (\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_{n-r+1} = a$

11. $\pi a = \mathrm{Z}_a \frown \overline{x \varepsilon}\,[\mathrm{D}(a, x) = 1]$ . . . . [Def.]
12. $\varphi a = \mathrm{num}\,(\pi a)$ . . . . [Def.]
13. $\varphi 1 = 1 . \varphi 2 = 1 . \varphi 3 = 2 . \ldots$
14. $\varphi a \varepsilon \mathrm{N} .$
15. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . b' \varepsilon \pi a . \supset . \mathrm{rest}\,(ab', b) \varepsilon \pi a .$
16. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . b', b'' \varepsilon \pi a . b' -= b'' . \supset . \mathrm{rest}\,(ab', b) -= \mathrm{rest}\,(ab'', b) .$
17. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . a^{\varphi b} - 1 \varepsilon \mathrm{N}b .$
18. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . \varphi(ab) = (\varphi a)(\varphi b) .$
19. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon (\mathrm{N}/\mathrm{Z}_n)\,\mathrm{sim} : r, s \varepsilon \mathrm{Z}_n . \supset_{r,s} . \mathrm{D}(fr, fs) = 1 : \supset .\cdot. \varphi(\Pi(f\mathrm{Z}_n))$ $= \Pi(\varphi(f\mathrm{Z}_n))$
20. $\Sigma_r \varphi((\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N})_r) = a$
21. $\varphi a = \Pi_r[1 - 1/(\mathrm{Np} \frown a/\mathrm{N})_r]$
22. $\mathrm{D}(a, b) = 1 . \supset . (\mathrm{N} \frown \overline{x \varepsilon}\,(a^x - 1 \varepsilon \mathrm{N}b)) -= \Lambda$
23. » $. \supset : x \varepsilon [\min\,(\mathrm{N} \frown \overline{x \varepsilon}\,(a^x - 1 \varepsilon \mathrm{N}b))] \times \mathrm{N} . = . a^x - 1 \varepsilon \mathrm{N}b$
24. $a \varepsilon b - \mathrm{N} . \mathrm{D}(a, b) = \mathrm{D}(b, c) = 1 . \supset . \mathrm{N} \frown \overline{x \varepsilon}\,(\mathrm{rest}\,(ac^x, b) = a) =$ $[\min\,(\mathrm{N} \frown \overline{y \varepsilon}\,(b^y - 1 \varepsilon \mathrm{N}c))] \times \mathrm{N}$

IV.

§ 1.

Def.

(§ 2) 1. $n \varepsilon N . f \varepsilon G|Z_{n+1} . \supset . \Sigma_1^{n+1} f = \Sigma_1^n f + f(n+1)$

(§ 3) 1. $A, B \varepsilon G . \supset : A > B . = . A \varepsilon B + G$

2. » $. \supset : A < B . = . B > A$

(§ 4) $A, B, C \varepsilon G . \supset :$

1. $A - B = G \cap \overline{X \varepsilon} (A = B + X)$

2. $A - B + C = (A - B) + C$

3. $A + B - C = (A + B) - C$

4. $A - B - C = (A - B) - C$

(§ 5) 1. $A \varepsilon G . \supset . 1A = A$

2. » $n \varepsilon N . \supset \cdot . (n+1)A = nA + A$

(§ 6) 1. $A, B \varepsilon G . m, n \varepsilon N . \supset : A = \frac{m}{n} B . = . nA = mB$

2. $A \varepsilon G . a \varepsilon R . m, n \varepsilon N . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n} . \supset . aA = \frac{m}{n} A$

(§ 7) 1. $A \varepsilon KG . X \varepsilon G . \supset : X < l'A . = . A \cap (X + G) -= \Lambda$

2. » $B \varepsilon G . \supset :: l'A = B . = .\because X \varepsilon G . \supset_X : X < l'A . = . X < B$

(§ 8) 1. $A \varepsilon G . a \varepsilon KR . l'a \varepsilon Q . \supset . (l'a)A = l'(aA)$

2. » $m \varepsilon Q . \supset : mA = \{ l'(R \cap \overline{x \varepsilon} (x \overline{\overline{<}} m)) \} A$

(§ 9) 1. $A, U \varepsilon G . \supset . A/U = l' \{ R \cap \overline{x \varepsilon} (n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_n \Lambda) \}$

2. » $. \supset . \overline{l'}(A/U) = R \cap \overline{x \varepsilon} (n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_n \Lambda)$

Pp.

$A, B, C \varepsilon G . \supset :$

0. $A + B \varepsilon G$

1. $A = B . \supset . A + C = B + C$

1_1. » $. \supset . C + A = C + B$

2. $A + C = B + C . \supset . A = B$

2_1. $C + A = C + B . \supset . A = B$

3. $A + B = B + A$

4. $(A + B) + C = A + (B + C)$

5. $A = B \cup A > B \cup A < B$

6. $A - \varepsilon A + G$

7. $G \cap \overline{X \varepsilon} (X < A) - = \Lambda$

8_1. $A < B . \supset : m \varepsilon N . mA \overset{=}{>} B . - =_m \Lambda$

8_2. $n \varepsilon N . \supset . \frac{1}{n} A \varepsilon G$

8. $H \varepsilon KG . H - = \Lambda : A \varepsilon G . H \cap (A + G) = \Lambda : \supset .\therefore l'H \varepsilon G$

P.

1. $Pp1 . Pp3 . \supset . Pp1_1$ (§2P1)

2. $Pp2 . Pp3 . \supset . Pp2_1$ (§2P2)

3. $Pp1_1 . Pp3 . \supset . Pp1$ (§2P1')

4. $Pp2_1 . Pp3 . \supset . Pp2$ (§2P2')

5. $Pp1 \circ Pp1_1 . \supset . - Pp3$

6. $Pp2 \circ Pp2_1 . \supset . - Pp3$

5'. $Pp3 . \supset . (- Pp1 . - Pp1_1) \cup (Pp1 . Pp1_1)$

6'. $Pp3 . \supset . (- Pp2 . - Pp2_1) \cup (Pp2 . Pp2_1)$

7. $Pp1 . Pp1_1 . Pp2 . Pp2_1 . - Pp3 . - = \Lambda$

8. $Pp1 . Pp1_1 . Pp4 . Pp8_2 . \supset . Pp7$ (§6P2)

9. $Pp7 . - Pp8_2 . - = \Lambda$

10. $Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp8 . \supset . Pp8_1$ (§7P5)

11. $Pp8_1 . - Pp8 . - = \Lambda$

12. $Pp1 . Pp2 . Pp3 . Pp4 . Pp5 . Pp6 . Pp7 . Pp8 . \supset . Pp8_2$ (§7P8)

13. $Pp8_2 . - Pp8 . - = \Lambda$

14. $\mathrm{Pp}(1\,.\,1_1\,.\,2\,.\,2_1\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6\,.\,7\,.\,8\,.\,8_1\,.\,8_2) = \iota\mathrm{Pp}1 \cup \iota\mathrm{Pp}1_1 \cup \iota\mathrm{Pp}2 \cup \iota\mathrm{Pp}2_1$
$\cup\, \iota\mathrm{Pp}3 \cup \iota\mathrm{Pp}4 \cup \iota\mathrm{Pp}5 \cup \iota\mathrm{Pp}6 \cup \iota\mathrm{Pp}7 \cup \iota\mathrm{Pp}8 \cup \iota\mathrm{Pp}8_1 \cup \iota\mathrm{Pp}8_2$ (Def.)

15. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2\,.3.4.5.6.7.8)/Z_8\,.\supset : f1.f2.f3.f4.f5.f6.f7.-f8.-=\Lambda$

15'. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2_1.3.4.5.6.7.8)/Z_8\,.\supset :$ »

15''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2\,.3.4.5.6.7.8)/Z_8\,.\supset :$ »

15'''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2_1.3.4.5.6.7.8)/Z_8\,.\supset :$ »

16. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2\,.3.4.5.6.8_1.8_2)/Z_8\,.\supset :$ »

16'. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2_1.3.4.5.6.8_1.8_2)/Z_8\,.\supset :$ »

16''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2\,.3.4.5.6.8_1.8_2)/Z_8\,.\supset :$ »

16'''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2_1.3.4.5.6.8_1.8_2)/Z_8\,.\supset :$ »

17. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2\,.3.4.5.6.7\,.8_1)/Z_8\,.\supset :$ »

17'. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.2_1.3.4.5.6.7\,.8_1)/Z_8\,.\supset :$ »

17''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2\,.3.4.5.6.7\,.8_1)/Z_8\,.\supset :$ »

17'''. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1_1.2_1.3.4.5.6.7\,.8_1)/Z_8\,.\supset :$ »

18. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.1_1.2.2_1.4.5.6.7\,.8\,)/Z_9\,.\supset : f1.f2.f3.f4.f5.f6.f7.f8.-f9.-=\Lambda$

19. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.1_1.2.2_1.4.5.6.8_1.8_2)/Z_9\,.\supset :$ »

20. $f \varepsilon \mathrm{Pp}(1\,.1_1.2.2_1.4.5.6.7\,.8_1)/Z_9\,.\supset :$ »

§ 2.

$A, B, C, D \varepsilon G\,.\supset :$

1. $A = B\,.\supset.\, C + A = C + B$ [1 . 3]
[Hp. $\mathrm{Pp}1, 3 : \supset : A+C=B+C\,.\, A+C=C+A\,.\, B+C=C+B : \supset :$ Ts]

1'. $A = B\,.\supset.\, A + C = B + C$ [1_1 . 3]
[Hp. $\mathrm{Pp}1_1, 3 : \supset : C+A=C+B.C+A=A+C.\,C+B=B+C : \supset :$ Ts]

2. $C + A = C + B\,.\supset.\, A = B$ [2 . 3]
[Hp. $\mathrm{Pp}3 : \supset : A + C = B + C\,.\,\mathrm{Pp}\,2 : \supset :$ Ts]

2'. $A + C = B + C\,.\supset.\, A = B$ [2_1 . 3]
[Hp. $\mathrm{Pp}3 : \supset : C + A = C + B\,.\,\mathrm{Pp}2_1 : \supset :$ Ts]

3. $A = B\,.\, C = D\,.\supset.\, A + C = B + D$ [1 . 1_1]
[Hp. $\mathrm{Pp}1\,.\,1_1 : \supset : A + C = B + C\,.\, B + C = B + D : \supset :$ Ts]

4. $A = B\,.\, A + C = B + D\,.\supset.\, C = D$ [1 . 2_1]
[Hp. $\mathrm{Pp}1 : \supset : A+C=B+C\,.$ Hp $: \supset : B+C=B+D\,.\,\mathrm{Pp}2_1 : \supset :$ Ts]

5. $C = D\,.\, A + C = B + D\,.\supset.\, A = B$ [1_1 . 2]
[Hp. $\mathrm{Pp}1_1 : \supset : A+C=A+D\,.$ Hp $: \supset : A+D=B+D\,.\,\mathrm{Pp}2 : \supset :$ Ts]

6. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . \supset . \Sigma_1{}^n f \varepsilon \mathrm{G}$

[(α) Hp. Pp0 : ɔ : $2 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) Hp. $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . $h \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_{m+1}$. Pp0 : ɔ : $\Sigma_1{}^m h + h(m+1) \varepsilon \mathrm{G}$.
Pp0 : ɔ : $\Sigma_1{}^{m+1} h \varepsilon \mathrm{G}$: ɔ : $m + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(α) . (β) : Pi : ɔ : Ts]

7. $n\varepsilon 1+\mathrm{N} . f\varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . f'\varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n : s\varepsilon \mathrm{Z}_n . \supset_s . fs = f's : \supset .\therefore \Sigma_1{}^n f = \Sigma_1{}^n f'$ [1 . 1₁]

[P3, 6 . Pi : ɔ : P7]

8. $n \varepsilon 2 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . \supset . \Sigma_1{}^n f = f1 + \Sigma_2{}^n f$ [1 . 1₁ . 4]

[(α) Hp. Pp4 : ɔ : $3 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) Hp. $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . $h \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_{m+1}$. Pp1 : ɔ : $\Sigma_1{}^{m+1} h = (h1 + \Sigma_2{}^m h) + h(m+1)$. Pp4 : ɔ : $\Sigma_1{}^{m+1} h = h1 + \left(\Sigma_2{}^m h + h(m+1)\right)$.
Pp1₁ : ɔ : $\Sigma_1{}^{m+1} h = h_1 + \Sigma_2{}^{m+1} h$: ɔ : $m + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts).

(α) . (β) . Pi : ɔ : Ts]

9. $n \varepsilon 2 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . r \varepsilon \mathrm{Z}_{n-1} . \supset . \sum_1^n f = \sum_1^r f + \sum_{r+1}^n f$ [1 . 1₁ . 4]

[(α) Hp. P8 : ɔ : $1 \varepsilon \overline{r \varepsilon}$ (Ts)

(β) Hp. $r = n - 1$. Def 1 : ɔ : Ts

(γ) Hp. $r < n - 1$. P8 : ɔ : $\sum_{r+2}^n f = f(r+1) + \sum_{r+2}^n f$. Pp 1₁ : ɔ :
$\sum_1^r f + \sum_{r+1}^n f = \sum_1^r f + \left(f(r+1) + \sum_{r+2}^n f\right)$. Pp 4 : ɔ : $\sum_1^r f + \sum_{r+1}^n f = \left(\sum_1^r f + f(r+1)\right) + \sum_{r+2}^n f$. Pp 1 : ɔ : $\sum_1^r f + \sum_{r+1}^n f = \sum_1^{r+1} f + \sum_{r+2}^n f$.

(δ) Hp. (γ) : ɔ : $r < n - 1 . r \varepsilon \overline{r \varepsilon}$ (Ts) . ɔ . $r + 1 \varepsilon \overline{r \varepsilon}$ (Ts) .

(α) . (β) . (δ) . Pi : ɔ : Ts]

10. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . r, s \varepsilon \mathrm{Z}_n . \supset . \sum_1^n f = \begin{pmatrix} r, s \\ s, r \end{pmatrix} \sum_1^n f$ [1 . 3 . 4]

[(α) Hp. Pp3 : ɔ : $2 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts).

(β₁) Hp. $m\varepsilon\overline{n\varepsilon}$ (Ts) . $h\varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_{m+1} . r, s\varepsilon \mathrm{Z}_m$. Pp1:ɔ:$\sum_1^{m+1} h = \begin{pmatrix} r, s \\ s, r \end{pmatrix} \sum_1^{m+1} h$

(β₂) $m\varepsilon 1+\mathrm{N} . h\varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_{m+1}$. P9. Pp3, 1:ɔ:$\sum_1^{m+1} h = \begin{pmatrix} m, m+1 \\ m+1, m \end{pmatrix} \sum_1^{m+1} h$

(β) Hp. $m\varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . (β₁) . (β₂) : ɔ : $m + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(α) . (β) . Pi : ɔ : Ts]

11. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n . g \varepsilon (\mathrm{Z}_n/\mathrm{Z}_n)\,\mathrm{sim} . \supset . \sum_1^n f = \sum_{r=1}^{r=n} f(gr)$ [1 . 3 . 4]

[(α) Hp. Pp3 $: \supset : 2 \,\varepsilon\, \overline{n\,\varepsilon}$ (Ts)

(β_1) Hp. $m \varepsilon\, \overline{n\,\varepsilon}$ (Ts) . $h \,\varepsilon\, G|Z_{m+1} \,.\, v \,\varepsilon\, (Z_{m+1}|Z_{m+1})$ sim . $v(m+1) = m+1$. Pp 1 $: \supset : \Sigma_1^{m+1} h = \Sigma_{r=1}^{r=m+1} h(vr)$

(β_2) $m \,\varepsilon\, 1 + N \,.\, h \,\varepsilon\, G|Z_{m+1} \,.\, v \,\varepsilon\, (Z_{m+1}|Z_{m+1})$ sim . $s \,\varepsilon\, Z_{m+1} \,.\, vs = m+1$. P 10 $: \supset : \Sigma_{r=1}^{r=m+1} h(vr) = \begin{pmatrix} vs, & v(m+1) \\ v(m+1), & vs \end{pmatrix} \Sigma_{r=1}^{r=m+1} h(vr)$

(β) Hp. $m \varepsilon\, \overline{n\,\varepsilon}$ (Ts) . (β_1) . (β_2) $: \supset : m+1 \,\varepsilon\, \overline{n\,\varepsilon}$ (Ts)

(α) . (β) . Pi $: \supset :$ Ts]

§ 3.

A, B, C, D ε G $. \supset :$

1. $A = B . B > C . \supset . A > C$

[Hp. Def 1 $: \supset : B \,\varepsilon\, C + G$. Hp $: \supset : A \,\varepsilon\, C + G$. Def 1 $: \supset :$ Ts] .

1′. $A = B + C . \supset . A > B$ (Def 1 = P 1′)

1″. » $. \supset . A > C$ [3]

[Hp. Pp3 $: \supset : A = C + B$. P1′ $: \supset :$ Ts]

2. $A > B . B > C . \supset . A > C$ [1 . 4]

[Hp. Def 1 $: \supset : A \,\varepsilon\, B + G . B \,\varepsilon\, C + G$. Pp1 $: \supset : A \,\varepsilon\, (C + G) + G$. Pp4, 0 $: \supset : A \,\varepsilon\, C + G$. Def 1 $: \supset :$ Ts]

3. $A > B . \supset . A + C > B + C$ [1 . 3 . 4]

[Hp. Def 1 $: \supset : A \,\varepsilon\, B + G$. Pp1 $: \supset : A + C \,\varepsilon\, (B + G) + C$. Pp1, 3, 4 $: \supset : A + C \,\varepsilon\, (B + C) + G$. Def 1 $: \supset :$ Ts]

4. $A > B . \supset . C + A > C + B$ [1_1 . 4]

[Hp. Def 1 $: \supset : A \,\varepsilon\, B + G$. Pp1_1 $: \supset : C + A \,\varepsilon\, C + (B + G)$. Pp4 $: \supset : C + A \,\varepsilon\, (C + B) + G$. Def 1 $: \supset :$ Ts]

5. $C + A > C + B . \supset . A > B$ [2_1 . 4]

[Hp. $: \supset : C + A \,\varepsilon\, (C + B) + G$. Pp4 $: \supset : C + A \,\varepsilon\, C + (B + G)$. Pp2_1 $: \supset : A \,\varepsilon\, B + G : \supset :$ Ts]

6. $A + C > B + C . \supset . A > B$ [2 . 3 . 4]

[Hp. Pp3 . P1 $: \supset : C + A > C + B$. P5 $: \supset :$ Ts]

7. $A = B . C > D . \supset . A + C > B + D$ [1 . 1_1 . 4]

[Hp. Pp1 . P4 $: \supset : A + C = B + C . B + C > B + D$. P 1 $: \supset :$ Ts]

8. $A = B . C > D . \supset . C + A > D + B$ [1 . 3 . 4]

[Hp. Pp1_1 . P3 $: \supset : C + A = C + B . C + B > D + B$. P1 $: \supset :$ Ts]

9. $A > B . C > D . \supset . A + C > B + D$ [1 . 3 . 4]

[Hp. P3, 4 : ɔ : $A + C > B + C . B + C > B + D$. P2 : ɔ : Ts]

10. $A > B . \supset . A + C > B$ [1 . 4]

[Def 1 : ɔ : $A + C > A$. Hp. P2 : ɔ : Ts]

11. $A > B + C . \supset . A > B$ [4]

[Hp. : ɔ : $A \varepsilon (B + C) + G$. Pp0, 4 : ɔ : $A \varepsilon B + G$: ɔ : Ts]

12. $A > B + C . \supset . A > C$ [3 . 4]

[Hp. Pp3 . P1 : ɔ : $A > C + B$. P11 : ɔ : Ts]

13. $A + B = C + D . A > C . \supset . B < D$ [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. : ɔ : $A \varepsilon C + G$. Pp1 . Hp : ɔ : $C + D \varepsilon (C + G) + B$. Pp4, 2 : ɔ : $D \varepsilon G + B$. Pp3 . Def 1, 2 : ɔ : Ts]

21. $A -= B . \supset . A > B \cup A < B$ [5]

[I §2P25 : ɔ : P21 = Pp5]

22. $A -> B . \supset . A = B \cup A < B$ [5]

23. $A -< B . \supset . A = B \cup A > B$ [5]

24. $A = B . \supset . A -> B . A -< B$ [6]

[Hp. $(A > B \cup A < B)$. P1 : ɔ : $B > B$. Def 1 : ɔ : $B \varepsilon B + G$. Pp6 . I §3P1 : ɔ .·. $A = B . (A > B \cup A < B) : = \Lambda$. I §3P8 . §2P7 .·. ɔ : P24]

25. $A > B . \supset . A -= B . A -< B$ [6]

26. $A < B . \supset . A -= B . A -> B$ [6]

27. $A -= B . = . A > B \cup A < B$ [5 . 6]

[P21, 24 . I §2P1, §1P3 : ɔ : P27]

28. $A -> B . = . A = B \cup A < B$ [5 . 6]

29. $A -< B . = . A = B \cup A > B$ [5 . 6]

31. $G -= \Lambda . \supset . \mathrm{num}\, G = \infty$ [6]

[(α) Hp. . ɔ . $A \varepsilon G . -=_{A} \Lambda$

(β) $A \varepsilon G$. Pp 0 : ɔ : $A + A \varepsilon G$

(γ) $A \varepsilon G$. Pp 6 : ɔ : $A -= A + A$

Hp. $n \varepsilon N . \mathrm{num}\, G \overline{\overline{>}} n$. (α) . (β) . (γ) :ɔ: $\mathrm{num}\, G \overline{\overline{>}} n+1$. Pi :ɔ: Ts]

32. $G -= \Lambda . \supset . \mathrm{num}\, (A + G) = \infty$ [6]

§ 4.

$A, B, C, D \,\varepsilon\, G \,.\supset:$

1. $A > B \,.\supset.\, A - B \,\varepsilon\, G$ $[2_1]$

$[(\alpha)$ Hp. §3 Def 1 $:\supset: X \varepsilon G \,.\, A = B + X \,.\, -=_X \Lambda$

(β) $X, Y \,\varepsilon\, G \,.\, A-B=X \,.\, A-B=Y \,.$ Def 1 $:\supset: A=B+X \,.\, A=B+Y$

$:\supset: B+X = B+Y \,.\, \mathrm{Pp}2_1 :\supset: X = Y$

$(\alpha) . (\beta) :\supset.\cdot. A > B \,.\, A - B \,-\varepsilon\, G : = \Lambda \,.$ I §3P8 $:\supset:$ P 1]

2. $A - B \,\varepsilon\, G \,.\supset.\, A > B$

[Hp. Def 1 $:\supset: A = B + (A - B) \,.$ Hp. §3 Def 1 $:\supset:$ Ts]

2'. $A > B \,.=.\, A - B \,\varepsilon\, G$ $[2_1]$

3. $A - B \,-\varepsilon\, G \,.\supset.\, A \leqq B$ $[2_1 . 5]$

[P1 . I §2P4 $:\supset: A - B \,-\varepsilon\, G \,.\supset.\, A -> B \,.$ §3P22 $:\supset:$ P 3]

4. $A \leqq B \,.\supset.\, A - B \,-\varepsilon\, G$ $[5 . 6]$

[P2 . §3P28 . I §2P4 $:\supset:$ P4]

5. $A > B \,.\supset.\, A = B + (A - B)$ $[2_1]$

[Hp. P1 $:\supset: A - B \,\varepsilon\, G \,.$ Def 1 $:\supset:$ Ts]

6. $A > B \,.\supset.\, A = A - B + B$ $[2 . 3]$

6'. $A > B \,.\supset.\, B = A - (A - B)$ $[2 . 3]$

[Hp. P5 . Pp3 $:\supset: A = (A - B) + B \,.$ Def 1 $:\supset:$ Ts]

7. $A = A + B - B$ $[3]$

[Pp3 $:\supset: B+A=A+B \,.$ Def 1 $:\supset: A=(A+B)-B \,.$ Def 3 $:\supset:$ Ts]

8. $A = B \,.\, A > C \,.\supset.\, A - C = B - C$ $[2_1]$

[Hp. §3P1 $:\supset: B>C \,.$ Hp. P5 $:\supset: A=C+(A-C) \,.\, B=C+(B-C) \,.$

Hp. $:\supset: C+(A-C)=C+(B-C) \,.\, \mathrm{Pp}2_1 :\supset:$ Ts]

9. $A = B \,.\, C > A \,.\supset.\, C - A = C - B$ $[1 . 2_1]$

[Hp. §3P1 $:\supset: C>B \,.$ Hp. P5 $:\supset: C=A+(C-A) \,.\, C=B+(C-B)$

$:\supset: A+(C-A)=B+(C-B) \,.$ Hp. §2P4 $:\supset:$ Ts]

10. $A = B \,.\, C = D \,.\, A > C \,.\supset.\, A - C = B - D$ $[1 . 2_1]$

[Hp. §3P1 $:\supset: B > C \,.\, B > D \,.$ P8, 9 $:\supset: A-C=B-C \,.\, B-C=$

$B - D :\supset:$ Ts]

11. $A > C \,.\, B > C \,.\, A - C = B - C \,.\supset.\, A = B$ $[1_1 . 2_1]$

[Hp. P1 . $\mathrm{Pp}1_1 :\supset: C + (A - C) = C + (B - C) \,.$ P5 $:\supset:$ Ts]

12. $C > A \,.\, C > B \,.\, C - A = C - B \,.\supset.\, A = B$ $[2 . 2_1]$

[Hp. P5 $:\supset: C = A + (C-A) \,.\, C = B + (C - B) :\supset: A + (C - A)$

$= B + (C-B) \,.$ Hp. P1 . Pp2 $:\supset:$ Ts]

13. A > B > C . ɔ . A − C > B − C [1 . 2_1 . 4]

[Hp. §3P2 : ɔ : A>C . Hp. P5 : ɔ : A=C+(A—C) . B=C+(B—C) .
Hp. §3P1 : ɔ : C+(A—C) > C + (B—C) . P1 . §3P5 : ɔ : Ts]

14. A > C . B > C . A − C > B − C . ɔ . A > B [1_1 . 2_1 . 4]

[Hp. P1 . §3P4 : ɔ : C + (A — C) > C + (B — C) . Hp. P5 : ɔ : Ts]

15. A > B . C > A . ɔ . C − A < C − B [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. §3P2 ; ɔ : C > B . Hp. P5 : ɔ : A + (C — A) = B + (C — B) .
Hp. §3P13 : ɔ : Ts]

16. C > A . C > B . C − A > C − B . ɔ . A < B [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. P6 : ɔ : (C—A) + A = (C—B) + B . Hp. §3P13 : ɔ : Ts]

17. A − B = C . ɔ . A = C + B [1 . 2 . 3]

[(α) Hp. P2 : ɔ : A > B
Hp. Pp1:ɔ:(A—B)+B=C+B.Pp3:ɔ:B+(A—B)=C+B.(α).P5:ɔ:Ts]

18. A − B = C . ɔ . A = B + C [1_1 . 2_1]

[(α) Hp. P2 : ɔ : A > B
Hp. Pp1_1 : ɔ : B + (A—B) = B + C . (α) . P5 : ɔ : Ts]

19. A − B > C . ɔ . A > C + B [1 . 2 . 3 . 4]

20. » . ɔ . A > B + C [1_1 . 2_1 . 4]

21. A > B + C . ɔ . A − B > C [1 . 2_1 . 4]

[Hp. §3 Def 1 : ɔ : B+C>B . Hp. P13 :ɔ: A—B>(B+C)—B Def 1.
§3P1 : ɔ : Ts]

22. A > B + C . ɔ . A − C > B [1 . 2 . 3 . 4]

23. A < B + C . A > B . ɔ . A − B < C [1 . 2_1 . 4]

23'. A < B + C . A > C . ɔ . A − C < B [1 . 2 . 3 . 4]

24. B > C . ɔ . A + (B − C) = A + B − C [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. P6 : ɔ : (B—C)+C = B . Pp1_1 : ɔ : A+((B—C)+C) = A+B .
Pp4 : ɔ : (A + (B—C)) + C = A + B . Pp3 . Def 1 : ɔ : Ts]

25. B > C . A > B − C . ɔ . A − (B − C) = A + C − B [1 . 2 . 3 . 4]

26. A > B . B > C . ɔ . A − (B − C) = A − B + C [1 . 2 . 3 . 4]

27. A > B + C . ɔ . A − (B + C) = A − B − C [1 . 2 . 3 . 4]

28. A > B . ɔ . A − B < A [2 . 3]

[Hp. P6 : ɔ : (A — B) + B = A . Hp. P1 . §3 Def 1 : ɔ : Ts]

29. A > B . B > D . D > C . ɔ . A − C > B − D [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. §3P2 . §4P13 : ɔ : A — C > B — C . Hp. §3P1 : ɔ : (A — C) +
D>(B—C)+D . P6.§3P1 : ɔ : (A—C)+D>B . Hp. P23 :ɔ: Ts]

31. $A \varepsilon G . \supset . G \frown \overline{X \varepsilon} (X < A) = G \frown (A - G)$ [2 . 3]

[(α) Hp. $B \varepsilon G \frown (A - G)$. P2, 28 $: \supset : B < A$

(β_1) » $B \varepsilon G \frown \overline{X \varepsilon} (X < A)$. P6′ $: \supset : B = A - (A - B)$. P1 $: \supset : B \varepsilon A - G$

» (α) . (β) . I §4P2 $: \supset :$ Ts]

§ 5.

$A, B, C \varepsilon G . m, n \varepsilon N . \supset :$

1. $nA \varepsilon G$

[(α) Hp. Def 1 $: \supset : 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $n \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . P0 $: \supset : nA + A \varepsilon G$. Def 2 $: \supset : (n+1)A \varepsilon G :$

$\supset : n + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi $: \supset :$ Ts]

1′. $NG = G$

[Def 1 . P1 $: \supset : G \supset NG . NG \supset G$. I §4P2 $: \supset :$ P1′]

2. $f \varepsilon G|Z_n : s \varepsilon Z_n . \supset_s . fs = A : \supset .\therefore \Sigma_1^n f = nA$ [1 . 1_1]

[(α) Hp. Def 1 $: \supset : 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . $h \varepsilon G|Z_{m+1} : s \varepsilon Z_{m+1} . \supset_s . hs = A :$ P1 . §2P3

$.\therefore \supset .\therefore \Sigma_1^{m+1} h = mA + A$. Def 2 $.\therefore \supset .\therefore \Sigma_1^{m+1} h = (m+1) A$

$.\therefore \supset .\therefore m + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi $: \supset :$ Ts]

3. $A = B . \supset . nA = nB$ [1 . 1_1]

[(α) Hp. Def 1 $: \supset : 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . §2P3 . Def 2 $: \supset : (m+1)A = (m+1)B$. Tn

$: \supset : m + 1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi $: \supset :$ Ts]

4. $m = n . \supset . mA = nA$ [1]

[(α) Hp. Tn . Def 1 $: \supset : (1, 1) \varepsilon \overline{(m, n) \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $(m', n') \varepsilon \overline{(m, n) \varepsilon}$ (Ts) . Pp1 . Def 2 $: \supset : (m'+1)A = (n'+1)A$.

Tn $: \supset : (m'+1, n'+1) \varepsilon \overline{(m, n) \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi $: \supset :$ Ts]

5. $A = B . m = n . \supset . mA = nB$ [1 . 1_1]

6. $m(A + B) = mA + mB$ [1 . 3 . 4]

[(α) Hp. §2P3 . Def 1 : ɔ : $1 \varepsilon \overline{m \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $n \varepsilon \overline{m \varepsilon}$ (Ts) . Pp1 : ɔ : $n(A+B) + (A+B) = nA + nB + (A+B)$. §2P10, 11 : ɔ : $n(A+B) + (A+B) = (nA + A) + (nB + B)$. Def 2 . §2P3 : ɔ : $(n+1)(A+B) = (n+1)A + (n+1)B$: ɔ : $n+1 \varepsilon \overline{m \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi : ɔ : Ts]

6'. $f \varepsilon G|Z_n$. ɔ . $m(\Sigma_1^n f) = \Sigma_1^n(mf)$ **[1 . 3 . 4]**

7. $(m+n)A = mA + nA$ **[1 . 1_1 . 4]**

[(α) Hp. Def 1, 2 . $Pp1_1$: ɔ : $(m+1)A = mA + 1A$: ɔ : $1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $n' \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . Pp1 : ɔ : $(m+n')A + A = (mA + n'A) + A$. $Pp1_1$, 4 . Def 2 . Tn . P4 : ɔ : $(m+(n'+1))A = mA + (n'+1)A$: ɔ : $n'+1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) : Pi : ɔ : Ts]

7'. $f \varepsilon N|Z_n$. ɔ . $(\Sigma_1^n f)A = \Sigma_{r=1}^{r=n}(fr)A$ **[1 . 1_1 . 4]**

8. $m(nA) = (mn)A$ **[1 . 3 . 4]**

[(α) Hp. Tn . Def 1 : ɔ : $1A = A$. $m = m \times 1$. P5 : ɔ : $m(1A) = (m \times 1)A$: ɔ : $1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β) Hp. $n' \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . Pp1 . P1 : ɔ : $m(n'A) + mA = (mn')A + mA$. P6, 7 : ɔ : $m(n'A + A) = (mn' + m)A$. P1, 3, 4 . Def 2 . Tn : ɔ : $m((n'+1)A) = (m(n'+1))A$: ɔ : $n' \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . Pi : ɔ : Ts]

9. $A > B$. ɔ . $mA > mB$ **[1 . 3 . 4]**

[Hp. : ɔ : $A \varepsilon B + G$. Hp. P1, 3, 6 : ɔ : $mA \varepsilon mB + G$: ɔ : Ts]

10. $m > n$. ɔ . $mA > nA$ **[1 . 1_1 . 4]**

[Hp. Tn . ɔ . $m \varepsilon n + N$. Hp. P1, 4, 7 : ɔ : $mA \varepsilon nA + G$: ɔ : Ts]

11. $A > B$. $m = n$. ɔ . $mA > nB$ **[1 . 3 . 4]**

[Hp. P9, 4 : ɔ : $mA > mB$. $mB = nB$. P1 . §3 P1 : ɔ : Ts]

12. $A = B$. $m > n$. ɔ . $mA > nB$ **[1 . 1_1 . 4]**

[Hp. P3, 10 : ɔ : $mA = mB$. $mB > nB$. §3P1 : ɔ : Ts]

13. $A > B$. $m > n$. ɔ . $mA > nB$ **[1 . 3 . 4]**

14. $mA = mB$. ɔ . $A = B$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6]**

[A, B ε G . m ε N . A−=B . §3P27 . P9, 1 : ɔ : mA−=mB . I §2P1 . ∵ . ɔ . ∵ . P14]

15. $mA > mB$. ɔ . $A > B$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6]**

16. $mA = nA$. ɔ . $m = n$ **[1 . 1_1 . 4 . 5 . 6]**

[$A\,\varepsilon\,G\,.\,m, n\,\varepsilon\,N\,.\,m -= n\,.\,Tn\,.\,§3P27\,.\,P10 : \supset : mA -= nA\,.\,I\,§2$ P1 .·. $\supset$.·. P16]

17. $mA > nA\,.\supset.\,m > n$ [1 . 1_1 . 4 . 5 . 6]

18. $A > B\,.\supset.\,m(A - B) = mA - mB$ [1 . 2 . 3 . 4]

[Hp. §4P5 . P3, 6 : $\supset$: $mA = mB + m(A - B)$.·. §4 Def 1 : $\supset$: Ts]

19. $m > n\,.\supset.\,(m - n)A = mA - nA$ [1 . 1_1 . 4]

[Hp. Tn : $\supset$: $m = n + (m - n)$. P4, 7 : $\supset$: $mA = nA + (m - n)A$. §4 Def 1 : $\supset$: Ts]

20. $p\,\varepsilon\,N\,.\,(mp)A = (np)B\,.\supset.\,mA = nB$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6]

21. » $.\,(mp)A > (np)B\,.\supset.\,mA > nB$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6]

22. $n\,\varepsilon\,1 + N\,.\supset.\,nA > A$ [1 . 1_1 . 4]

[Hp. Tn . $\supset$. $n > 1$. P12 . Def 1 . §3P1 : $\supset$: Ts]

23. $A = B\,.\supset.\,m\,\varepsilon\,N\,.\,mA \overset{=}{>} B\,.-=_m \Lambda$ [1 . 1_1 . 4]

[Hp. Def 1 . P22 . §3P1 . Tn : $\supset$: Ts]

24. $A > B\,.\supset.\,m\,\varepsilon\,N\,.\,mA > B\,.-=_m \Lambda$ [1 . 1_1 . 4]

[Hp. P22 . §3P2 . Tn : $\supset$: Ts]

25. $x\,\varepsilon\,R\,.\,n, nx\,\varepsilon\,N\,.\,nA = (nx)B\,.\supset: m, mx\,\varepsilon\,N\,.\supset_m.\,mA = (mx)B$ [1.3.4.5.6]

[Hp. $m, mx\,\varepsilon\,N$. P3, 4, 8 . Tr : $\supset$: $n(mA) = n((mx)B)$. P20 : $\supset$: Ts]

31. $mA \overset{=}{>} B\,.-=_m \Lambda$ [1 . 1_1 . 4 . 5 . 8_1]

[(α) Hp. $A \overset{=}{>} B$. P23, 24 : $\supset$: Ts

(β) » $A < B$. $Pp8_1$: $\supset$: Ts

» (α) . (β) . Pp5 : $\supset$: Ts]

32. $A \overset{=}{>} B\,.\supset: m\,\varepsilon\,N\,.\,(m+1)B > A \overset{=}{>} mB\,.-=_m \Lambda$ [1 . 1_1 . 4 . 5 . 6 . 8_1]

[(α) Hp. P23, 24 : $\supset$: $N \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(xB \overset{=}{<} A) -= \Lambda$. P17, 31 . §3P1, 2 . Tn : $\supset$: $\max(N \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(xB \overset{=}{<} A))\,\varepsilon\,N$

(β) Hp. $m = \max(N \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(xB \overset{=}{<} A))$. §3P28 : $\supset$: $(m + 1)B > A$.

» (α) . (β) : $\supset$: Ts]

33. $U\,\varepsilon\,G\,.\,A < B\,.\supset: x, y\,\varepsilon\,N\,.\,xA < yU < xB\,.-=_{x,y} \Lambda$ [1.3.4.5.6.8_1]

[(α) Hp. §4P1 . P31 : $\supset$: $m\,\varepsilon\,N\,.\,m(B - A) > U\,.-=_m \Lambda$

(β) » $m\,\varepsilon\,N\,.\,m(B - A) > U\,.\,mA < U$. P18 . §4P19 . §3P12 : $\supset$: $U < mB$: $\supset$: $(m, 1)\,\varepsilon\,\overline{(x, y)\,\varepsilon}$ (Ts)

(γ) Hp. $m\,\varepsilon\,N\,.\,mA \overset{=}{>} U$. P32 : $\supset$: $n\,\varepsilon\,N\,.\,(n + 1)U \overset{=}{>} mA > nU\,.-=_n \Lambda$

(δ) Hp. $m, n \varepsilon$ N . m(B—A) > U . mA $\overline{\overline{>}}$ U . $(n+1)$U > mA $\overline{\overline{>}}$ nU . §3P9 . §4P19, 6 : ɔ : mA < $(n+1)$ U < mB : ɔ : $(m, n+1)$ $\varepsilon\ \overline{(x, y)\,\varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . (γ) . (δ) . Pp5 : ɔ : Ts]

34. G ⌒ $\overline{\text{X}\,\varepsilon}$ (X < A) = Λ . ɔ . G = NA [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]

[(α) Hp. B ε G . §3P23 : ɔ : B $\overline{\overline{>}}$ A . P32 : ɔ : $m\ \varepsilon$ N . $(m+1)$A > B $\overline{\overline{>}}$ mA . − =$_m$ Λ

(β) Hp. B ε G . $m\ \varepsilon$ N . B > mA . §3P23 : ɔ : B — mA $\overline{\overline{>}}$ A . §4P18, 19 : ɔ : B $\overline{\overline{>}}$ $(m+1)$A

Hp. (α) . (β) . §3P29 : ɔ : B ε G . B − ε NA . = Λ . I §3P8 : ɔ : B ε G . ɔ . B ε NA . P1′. I §4P2 : ɔ : Ts]

35. G ⌒ (− NA) − = Λ . ⦁ . G ⌒ $\overline{\text{X}\,\varepsilon}$ (X < A) − = Λ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]

[(α) P34 . §4P31 . I §2P1 : ɔ : G − = NA . ɔ . G ⌒ (A — G) − = Λ

(β) P1′. I §4P2 . §2P2 : ɔ : G − = NA . = . G ⌒ (− NA) − = Λ

(α) . (β) . I §1P21 : ɔ : P35]

36. G ⌒ $\overline{\text{X}\,\varepsilon}$ (X < A) − = Λ . ɔ . G ⌒ (− NA) − = Λ [1 . 2 . 3 . 4 . 6]

[(α) Hp. §4P31 : ɔ : B ε G ⌒ (A — G) . − =$_B$ Λ

(β) » B ε G ⌒ (A — G) . B ε NA . Def 1 . P22 : ɔ . B $\overline{\overline{>}}$ A

(γ) » §4P28 . §3P26 : ɔ : B ε G ⌒ (A — G) . B ε NA . = Λ

(α) . (γ) . I §3P8 : ɔ : P36]

41. A < B + C . ɔ : X, Y ε G . X + Y = A : X < B . Y < C . − =$_{X,\,Y}$ Λ [1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 7]

[(α) Hp. A $\overline{\overline{<}}$ B . D ε G ⌒ (A — G) ⌒ (C — G) . §4P6, 28 . §3P1, 2 : ɔ : (A — D, D) $\varepsilon\ \overline{(\text{X}, \text{Y})\,\varepsilon}$ (Ts)

(β) Hp. A > B . §4P23, 1 : ɔ : C — (A — B) ε G

(γ) » A > B . E ε G ⌒ (C — (A — B) — G) ⌒ (B — G) . §4P19, 28, 6, 7 : ɔ : (B — E, E + (A — B)) $\varepsilon\ \overline{(\text{X}, \text{Y})\,\varepsilon}$ (Ts)

(α_1) Hp. Pp7, 5 . §3P1, 2 : ɔ : D ε G ⌒ (A — G) ⌒ (C — G) . − =$_D$ Λ

(γ_1) » A > B . (β) . Pp7, 5 . §3P1, 2 : ɔ : E ε G ⌒ (C — (A — B) — G) ⌒ (B — G) . − =$_E$ Λ

Hp. (α) . (α_1) . (γ) . (γ_1) . Pp5 : ɔ : Ts]

42. A < B . ɔ : X ε G . A < X < B . − =$_X$ Λ [1_1 . 2_1 . 4 . 7]

[(α) Hp. C ε G . C < B — A . §4P20 : ɔ : A + C $\varepsilon\ \overline{\text{X}\,\varepsilon}$ (Ts)

(β) » §4P1 : ɔ : B — A ε G . Pp7 : ɔ : C ε G ⌒ (B — A — G) . − =$_C$ Λ

» (α) . (β) : ɔ : Ts]

43. $X, A - X \varepsilon G . A - X < B . - =_X \Lambda$ **[1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 7]**

[(α) Hp. $A \overline{\overline{<}} B . C \varepsilon G \frown (A - G)$. §4P28 . §3P1, 2 : ɔ : $C \varepsilon \overline{X \varepsilon}$ (Ts)

(β) » $A > B . D \varepsilon G . A - B < D < A$. §4P20, 23′ : ɔ : $D \varepsilon \overline{X \varepsilon}$ (Ts)

(α_1) » Pp7 : ɔ : $C \varepsilon G \frown (A - G) . - =_C \Lambda$

(β_1) » $A > B$. §4P1, 28 . P42 : ɔ : $D \varepsilon G . A - B < D < A . - =_D \Lambda$

» (α) . (α_1) . (β) . (β_1) . Pp5 : ɔ : Ts]

43′. $A \overline{\overline{>}} B$. ɔ : $X, A - X \varepsilon G . A - X < B . - =_X \Lambda$

43″. $A \overline{\overline{<}} B$. ɔ : »

43‴. $A \gtrless B$. ɔ : » **[1 . 2 . 3 . 4 . 7]**

44. $f \varepsilon G/Z_n . \Sigma_1{}^n f \overline{\overline{<}} A . - =_f \Lambda$ **[$1_1 . 2_1 . 4 . 7$]**

[(α) Hp. Pp7 . I §4P7 : ɔ : $1 \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

(β_1) » $B \varepsilon G$. Pp7 . §4P5 : ɔ : $U, V \varepsilon G . U + V = B . - =_{U, V} \Lambda$

(β_2) » $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . (β_1) . Pp 1_1 . Pp 4 . § 3 P 1 : ɔ : $h \varepsilon G / Z_{m+1}$. $\Sigma_1{}^{m+1} h \overline{\overline{<}} A . - =_h \Lambda$

(β) Hp. (β_2) : ɔ : $m \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts) . ɔ . $(m + 1) \varepsilon \overline{n \varepsilon}$ (Ts)

» (α) . (β) . Pi : ɔ : Ts]

45. $X \varepsilon G . nX \overline{\overline{<}} A . - =_X \Lambda$ **[1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 7]**

[(α) Hp. Pp5 . §3P1, 2 . P44 : ɔ :: $f \varepsilon G/Z_n . \Sigma_1{}^n f \overline{\overline{<}} A : r \varepsilon Z_n . ɔ_r . f1 \overline{\overline{<}} fr : - =_f \Lambda$

(β) Hp. $f \varepsilon G/Z_n : r \varepsilon Z_n . ɔ_r . f1 \overline{\overline{<}} fr$: §3P9 . §5P2 . ɔ : $n(f1) \overline{\overline{<}} \Sigma_1{}^n f$

» (α) . (β) . §3P2 : ɔ : Ts]

47. $A < B + C$. ɔ : $m, n \varepsilon N . m > n . nA < mB . (m - n)A < mC . - =_{m,n} \Lambda$ **[$1'$. 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8_1]**

[(α) Hp. $A \overline{\overline{<}} B . A \overline{\overline{<}} C$. P13 . Tn : ɔ : Ts

(β_1) » §4P1 . P7 : ɔ : $D \varepsilon G . D < B + C - A . D < B . - =_D \Lambda$

(β_2) » $D \varepsilon G \frown (B - G)$. §4P28 . P33 : ɔ : $m, n \varepsilon N . m(B - D) < nA < mB - =_{m,n} \Lambda$

(β_3) Hp. $m, n \varepsilon N . nA < mB . A > B$. P13, 17 : ɔ : $n < m$

(β_4) » $D \varepsilon G . D < B + C - A . D < B . m, n \varepsilon N . m > n . m(B - D) < nA$: ɔ : $(m - n)A < mC$

(β) Hp. $A > B$. (β_1) . (β_2) . (β_3) . (β_4) : ɔ : Ts

» (α) . (β) . Pp5 : ɔ : Ts]

48. $x \varepsilon \mathrm{R} . n, nx \varepsilon \mathrm{N} . (nx)\mathrm{A} < n\mathrm{B} + n\mathrm{C} . \supset : y, z \varepsilon \mathrm{R} . m, my, mz \varepsilon \mathrm{N} . x = y + z . (my)\mathrm{A} < m\mathrm{B} . (mz)\mathrm{A} < m\mathrm{C} . -=_{m,y,z} \Lambda$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8_1]

49. $\mathrm{A} > \mathrm{B} . \supset : \mathrm{X} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{X} < \mathrm{A} . \mathrm{A} - n\mathrm{X} \overline{\overline{<}} \mathrm{B} . -=_{\mathrm{X}} \Lambda$ [1.3.4.5.6.7.8_1]

[(α) Hp. P45 : $\supset : \mathrm{Y} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{Y} \overline{\overline{<}} \mathrm{B} -=_{\mathrm{Y}} \Lambda$

(β) » $\mathrm{Y} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{Y} \overline{\overline{<}} \mathrm{B} : \supset : n\mathrm{Y} < \mathrm{A}$. P32 : $\supset : m \varepsilon \mathrm{N} . (m+1)(n\mathrm{Y}) > \mathrm{A} \overline{\overline{>}} m(n\mathrm{Y}) . -=_{m} \Lambda$

(γ_1) Hp. $\mathrm{Y} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{Y} \overline{\overline{<}} \mathrm{B} . m \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{A} = m(n\mathrm{Y}) : \supset : m \overline{\overline{>}} 2$

(γ) » (γ_1) $: \supset : \mathrm{A} - n((m-1)\mathrm{Y}) \overline{\overline{<}} \mathrm{B}$

(δ) » $(m+1)(n\mathrm{Y}) > \mathrm{A} > m(n\mathrm{Y}) : \supset : \mathrm{A} - n(m\mathrm{Y}) < \mathrm{B}$

» (α) . (β) . (γ) . (δ) . P1 : $\supset$: Ts]

50. $\mathrm{A} < \mathrm{B} . \supset : \mathrm{X} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{A} < n\mathrm{X} < \mathrm{B} . -=_{\mathrm{X}} \Lambda$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8_1]

[(α) Hp. P49 : $\supset : \mathrm{X} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{X} < \mathrm{B} . \mathrm{B} - n\mathrm{X} < \mathrm{B} - \mathrm{A} . -=_{\mathrm{X}} \Lambda$

(β) » $\mathrm{X} \varepsilon \mathrm{G} . n\mathrm{X} < \mathrm{B} , \mathrm{B} - n\mathrm{X} < \mathrm{B} - \mathrm{A} : \supset : \mathrm{A} < n\mathrm{X} < \mathrm{B}$

» (α) . (β) : $\supset$: Ts]

§ 6.

$\mathrm{A}, \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . a, b \varepsilon \mathrm{R} . \supset :$

1. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . n\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = \mathrm{A}$ [1 . 1_1 . 8_2]

[(α) Hp. $\mathrm{Pp}8_2 : \supset : \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}\mathrm{A} . -=_{\mathrm{B}} \Lambda$.

(β_1) » $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}\mathrm{A}$. Def 1 : $\supset : \mathrm{A} = n\mathrm{B}$

(β_2) » . §5P3 : $\supset : n\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = n\mathrm{B}$

(β) » (β_1) . (β_2) : $\supset : n\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = \mathrm{A}$

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

2. $\mathrm{G} \frown \overline{\mathrm{X} \varepsilon} (\mathrm{X} < \mathrm{A}) -= \Lambda$. [1 . 1_1 . 4 . 8_2]

[(α) Hp. $n \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \mathrm{Pp}8_2 : \supset : \frac{1}{n}\mathrm{A} \varepsilon \mathrm{G}$

(β) » (α) . §5P22 : $\supset : \frac{1}{n}\mathrm{A} < n\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right)$. P1 . §3P1 : $\supset$: $\frac{1}{n}\mathrm{A} < \mathrm{A}$

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

2'. P2 = Pp7

3. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . m\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = \frac{m}{n}\mathrm{A}$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[(α) Hp. $\mathrm{Pp}8_2 : \supset : \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}\mathrm{A} . - =_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$.

(β_1) » $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}\mathrm{A} . \mathrm{Def}\,1 : \supset : \mathrm{A} = n\mathrm{B}$. Hp. §5P1, 3, 8 : $\supset$:

$m\mathrm{A} = n(m\mathrm{B}) . \mathrm{Def}\,1 : \supset : \frac{m}{n}\mathrm{A} = m\mathrm{B}$.

(β_2) Hp. $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}\mathrm{A}$. §5P3 : $\supset : m\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = m\mathrm{B}$

(β) » (β_1) . (β) : $\supset : m\left(\frac{1}{n}\mathrm{A}\right) = \frac{m}{n}\mathrm{A}$

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

4. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) = \frac{m}{n}\mathrm{A}$ [8_2]

[(α) Hp. $\mathrm{Pp}8_2$. §5P1 : $\supset : \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) . - =_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$.

(β_1) » $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) . \mathrm{Def}\,1 : \supset : m\mathrm{A} = n\mathrm{B} . \mathrm{Def}\,1 : \supset : \frac{m}{n}\mathrm{A} = \mathrm{B}$

(β) » (β_1) : $\supset : \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) = \frac{m}{n}\mathrm{A}$.

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

5. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \frac{m}{n}\mathrm{A} \varepsilon \mathrm{G}$ [8_2]

[Hp. §5P1 . $\mathrm{Pp}8_2 : \supset : \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) \varepsilon \mathrm{G}$. P4 : $\supset$: Ts]

6. $n \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{A} = \mathrm{B} . \supset . \frac{1}{n}\mathrm{A} = \frac{1}{n}\mathrm{B}$. [1 . 1_1 . 8_2]

[Hp. P1 : $\supset : \mathrm{A} = n\left(\frac{1}{n}\mathrm{B}\right)$. Def 1 : $\supset$: Ts]

7. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{A} = \mathrm{B} . \supset . \frac{m}{n}\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{B}$ [1 . 1_1 . 8_2]

[Hp. §5P3 : $\supset : m\mathrm{A} = m\mathrm{B}$. P6 : $\supset : \frac{1}{n}(m\mathrm{A}) = \frac{1}{n}(m\mathrm{B})$. P4 : $\supset$: Ts]

8. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \frac{1}{n}(n\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ [1 . 1_1 . 8_2]

[(α) Hp. $\mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{B} = n\mathrm{A} . \mathrm{Def}\,1 : \supset : \mathrm{A} = \frac{1}{n}\mathrm{B}$

(β) » P6 : $\supset : \frac{1}{n}\mathrm{B} = \frac{1}{n}(n\mathrm{A})$.

Hp. §5P1 . (α) . (β) : $\supset$: Ts]

9. $m, m', n, n' \varepsilon \mathrm{N} . \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} . \supset . \frac{m}{n}\mathrm{A} = \frac{m'}{n'}\mathrm{A} .$ $[1 . 3 . 4 . 8_2]$

[Hp. Tr : $\supset$: $mn' = nm'$. Hp. §5P4, 8 : $\supset$: $n'(m\mathrm{A}) = n(m'\mathrm{A})$. Def 1 .
P3 : $\supset$: $m\mathrm{A} = n\left(\frac{1}{n'}(m'\mathrm{A})\right)$. P3 . §5P5 . P5 : $\supset$: $m\mathrm{A} = n\left(\frac{m'}{n'}\mathrm{A}\right)$.
Def 1 : $\supset$: Ts]

10. $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . a = \frac{m}{n} . \supset . a\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{A}$ $[1 . 3 . 4 . 8_2]$

[(α) Hp. Tr : $\supset$: $m', n' \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{D}(m', n') = 1 . a = \frac{m'}{n'} . - =_{m', n'} \Lambda .$

(β_1) » $m', n' \varepsilon \mathrm{N} . a = \frac{m'}{n'}$. Tr : $\supset$: $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Hp. P9 : $\supset$: $\frac{m}{n}\mathrm{A} = \frac{m'}{n'}\mathrm{A}$.

(β_2) » $\mathrm{D}(m', n') = 1$. Def 2 : $\supset$: $a\mathrm{A} = \frac{m'}{n'}\mathrm{A}$

(β) » » (β_1).(β_2) . P5 : $\supset$: $a\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{A}$.

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

11. $a\mathrm{A} \,\varepsilon\, \dot{\mathrm{G}}$ $[8_2]$

[(α) Hp. Tr : $\supset$: num $\left[\overline{(m, n)\,\varepsilon}\left(m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n}\right)\right] = 1$

(β) » $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n}$. P5 . Def 2 . ⊢ §4P10 : $\supset$: $a\mathrm{A} \,\varepsilon\, \dot{\mathrm{G}}$.

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

12. $\mathrm{G} = \mathrm{RG}$ $[8_2]$

13. $a = b . \supset . a\mathrm{A} = b\mathrm{A}$ $[8_2]$

[(α) Hp. Tr : $\supset$: $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = b = \frac{m}{n} . - =_{m, n} \Lambda .$

(β) » $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = b = \frac{m}{n}$. P5 . Def 2 : $\supset$: $a\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{A}$.
$b\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{A}$: $\supset$: $a\mathrm{A} = b\mathrm{A}$

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

14. $\mathrm{A} = \mathrm{B} . \supset . a\mathrm{A} = a\mathrm{B}$ $[1 . 1_1 . 8_2]$

[(α) Hp. Tr : $\supset$: $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n} . - =_{m, n} \Lambda .$

(β_1) » $m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{D}(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n}$. Def 2 : $\supset$: $a\mathrm{A} = \frac{m}{n}\mathrm{A} . a\mathrm{B} = \frac{m}{n}\mathrm{B}$.

(β) » (β_1) . P5, 7 : $\supset$: $a\mathrm{A} = a\mathrm{B}$.

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

15. $n \varepsilon N . \supset . \frac{1}{n}(A + B) = \frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B .$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[Hp. P1 : $\supset$: $A = n\left(\frac{1}{n}A\right) . B = n\left(\frac{1}{n}B\right)$. $Pp8_2$. §2P3 . §5P6 : $\supset$:

$A + B = n\left(\frac{1}{n}A + \frac{1}{n}B\right)$. Def1 : $\supset$: Ts]

15'. $m, n \varepsilon N . \supset . \frac{m}{n}(A + B) = \frac{m}{n}A + \frac{m}{n}B$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[Hp. §5P6 : $\supset$: $m(A + B) = mA + mB$. P15, 4 . §2P3 : $\supset$: Ts]

16. $a(A + B) = aA + aB$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[(α) Hp. Tr : $\supset$: $m, n \varepsilon N . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n} . - =_{m, n} \Lambda$.

(β_1) » $m, n \varepsilon N . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n}$. Def 2 : $\supset$: $a(A + B) =$

$\frac{m}{n}(A + B) . aA = \frac{m}{n}A . aB = \frac{m}{n}B$

(β) Hp. $m, n \varepsilon N . D(m, n) = 1 . a = \frac{m}{n}$ §2P3 . P15', 5 . (β_1) : $\supset$:

$a(A + B) = aA + aB$

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

16'. $n \varepsilon 1 + N . f \varepsilon G|Z_n . \supset . a(\Sigma_1{}^n f) = \Sigma_1{}^n a(f)$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

17. $(a + b)A = aA + bA$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[(α) Hp. Tr : $\supset$: $m, m', n \varepsilon N . a = \frac{m}{n}, b = \frac{m'}{n} . - =_{m, m', n} \Lambda$.

(β_1) » $m, m', n \varepsilon N$. §5P7 . P15 : $\supset$: $\frac{m + m'}{n}A = \frac{m}{n}A + \frac{m'}{n}A$

(β_2) » $a = \frac{m}{n}, b = \frac{m'}{n}$. Tr : $\supset$: $a + b = \frac{m + m'}{n}$

(β) » » (β_1) . (β_2) . P10 : $\supset$: $(a + b)A$

$= aA + bA$.

Hp. (α) . (β) : $\supset$: Ts]

17'. $n \varepsilon 1 + N . f \varepsilon R|Z_n . \supset . (\Sigma_1{}^n f)A = \Sigma_{r=1}^{r=n}(fr)A$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

18. $a(bA) = (ab)A$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

[(α_1) Hp. $m, m', n, n' \varepsilon N . \frac{m'}{n'}A = B$. Def1 . §5P3, 8 : $\supset$: $(mm')A =$

$(mn')B$.P6, 4:$\supset$: $\frac{mm'}{nn'}A = \frac{mn'}{nn'}B$. Tr. P9 :$\supset$: $\left(\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'}\right)A = \frac{m}{n}B$.

(α) Hp. $m, m', n, n' \varepsilon N . \frac{m'}{n'}A = B$.($\alpha_1$).P14 :$\supset$: $\frac{m}{n}\left(\frac{m'}{n'}A\right) = \left(\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'}\right)A$.

(β) Hp. Tr . P5 : Ɔ : $m, m', n, n' \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{G} . a = \frac{m}{n} . b = \frac{m'}{n'} . \frac{m'}{n'}\mathrm{A}$
$= \mathrm{B} . -=_{m, m', n, n', \mathrm{B}} \Lambda$.
Hp. $(\alpha) . (\beta)$. P10 . Tr : Ɔ :. Ts]

19. $\mathrm{A} > \mathrm{B}$. Ɔ . $a\mathrm{A} > a\mathrm{B}$. [1 . 3 . 4 . 8_2]
[Hp. . Ɔ : $\mathrm{A} \varepsilon \mathrm{B} + \mathrm{G}$. P14, 16, 11 : Ɔ : $a\mathrm{A} \varepsilon a\mathrm{B} + \mathrm{G}$: Ɔ : Ts]

20. $a > b$. Ɔ . $a\mathrm{A} > b\mathrm{A}$. [1 . 3 . 4 . 8_2]
[Hp. Tr : Ɔ : $a \varepsilon b + \mathrm{R}$. P13, 17, 11 : Ɔ : $a\mathrm{A} \varepsilon b\mathrm{A} + \mathrm{G}$: Ɔ : Ts]

21. $\mathrm{A} > \mathrm{B} . a \overline{\overline{>}} b$. Ɔ . $a\mathrm{A} > b\mathrm{B}$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

22. $\mathrm{A} \overline{\overline{>}} \mathrm{B} . a > b$. Ɔ . $a\mathrm{A} > b\mathrm{B}$ [1 . 3 . 4 . 8_2]

23. $a\mathrm{A} = a\mathrm{B}$. Ɔ . $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]
[A, B ε G . $a \varepsilon$ R . A $-=$ B . §3P27 . P11, 19 : Ɔ : aA $-=$ aB . I§2P1 .·. Ɔ .·. P23]

24. $a\mathrm{A} > a\mathrm{B}$. Ɔ . $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

25. $a\mathrm{A} = b\mathrm{A}$. Ɔ . $a = b$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

26. $a\mathrm{A} > b\mathrm{A}$. Ɔ . $a > b$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

27. $\mathrm{A} > \mathrm{B}$. Ɔ . $a(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = a\mathrm{A} - a\mathrm{B}$ [1 . 2 . 3 . 4 . 8_2]
[Hp. §4P5 . P14, 16 : Ɔ : $a\mathrm{A} = a\mathrm{B} + a(\mathrm{A} - \mathrm{B})$. §4Def1 : Ɔ : Ts]

28. $a > b$. Ɔ . $(a - b)\mathrm{A} = a\mathrm{A} - b\mathrm{A}$ [1 . 2 . 3 . 4 . 8_2]
[Hp. Tr : Ɔ : $a = b + (a - b)$. P13, 17 : Ɔ : $a\mathrm{A} = b\mathrm{A} + (a - b)\mathrm{A}$.
§4Def1 : Ɔ : Ts]

29. $\mathrm{U} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{A} < \mathrm{B}$. Ɔ : $x \varepsilon \mathrm{R} . \mathrm{A} < x\mathrm{U} < \mathrm{B} . -=_x \Lambda$ [1.3.4.5.6.8_1.8_2]
[(α) Hp. §5P33 : Ɔ : $a, b \varepsilon \mathrm{N} . a\mathrm{A} < b\mathrm{U} < a\mathrm{B} . -=_{a, b} \Lambda$.
(β) » $a, b \varepsilon \mathrm{N} . a\mathrm{A} < b\mathrm{U} < a\mathrm{B}$. P11, 19 : Ɔ : $\frac{1}{a}(a\mathrm{A}) < \frac{1}{a}(b\mathrm{U})$
$< \frac{1}{a}(a\mathrm{B})$. Tr . P18 . §3P1 : Ɔ : $\mathrm{A} < \frac{b}{a}\mathrm{U} < \mathrm{B}$.
Hp. $(\alpha) . (\beta)$. Tr . P10 : Ɔ : Ts]

§ 7.

1. $\mathrm{A} \varepsilon \mathrm{KG} . \mathrm{B} \varepsilon \mathrm{A}$. Ɔ . $\mathrm{B} \overline{\overline{<}} \mathrm{l'A}$ [1 . 4 . 5]
[(α) Hp. $\mathrm{A} \frown (\mathrm{B} + \mathrm{G}) -= \Lambda$. Def1 : Ɔ : $\mathrm{B} < \mathrm{l'A}$
(β_1) » $\mathrm{A} \frown (\mathrm{B} + \mathrm{G}) = \Lambda . \mathrm{X} \varepsilon \mathrm{G} . \mathrm{X} < \mathrm{B}$. Def1 : Ɔ : $\mathrm{X} < \mathrm{l'A}$
(β_2) » » $\mathrm{X} < \mathrm{l'A}$. §3P22, 1, 2 : Ɔ : $\mathrm{X} < \mathrm{B}$
(β) » $(\beta_1) . (\beta_2)$. Def2 : Ɔ : $\mathrm{B} = \mathrm{l'A}$
Hp. $(\alpha) . (\beta)$. I §3P1'' : Ɔ : Ts]

2. $A \varepsilon KG . l'A \varepsilon G . \supset : B \varepsilon G . A \frown (B + G) = \Lambda . -=_B \Lambda .$ [1.4.5]

3. $A \varepsilon KG . l'A, B \varepsilon G . A \frown (B + G) = \Lambda . \supset . l'A \stackrel{=}{<} B$ [5]

[Hp. $B < l'A . \mathrm{Def1} : \supset : A \frown (B + G) -= \Lambda .$ Hp. $\mathrm{I§3P1} : \supset :$ Hp. $B < l'A . = \Lambda .$ $\mathrm{I§3P8} . \mathrm{§3P23} : \supset : \mathrm{P3}$]

4. $A \varepsilon KG . X, Y \varepsilon G . X \stackrel{=}{<} Y . Y \stackrel{=}{<} l'A . \supset . X \stackrel{=}{<} l'A$ [1.4]

5. $A, B \varepsilon G . \supset : m \varepsilon N . mA \stackrel{=}{>} B . -=_m \Lambda$. [1.3.4.5.6.8]

[(α) Hp. $NA \frown (B + G) = \Lambda . \mathrm{Pp8} : \supset : C \varepsilon G . l'(NA) = C . -=_C \Lambda .$

(β) $A \varepsilon G . \mathrm{§5P22} : \supset : NA \frown (A + G) -= \Lambda . \mathrm{Def1} : \supset : A < l'(NA).$

(γ_1) Hp. $C \varepsilon G . C = l'(NA) . (\beta) . \mathrm{§3P1} : \supset : A < C . \mathrm{§4P28} : \supset : C - A < C.$

(γ) » $(\gamma_1) . \mathrm{P4} : \supset : C - A < l'(NA) . \mathrm{Def1} : \supset : m \varepsilon N.$ $C - A < mA -=_m \Lambda .$

(δ) Hp. $C \varepsilon G . m \varepsilon N . C - A < mA . \mathrm{§4P19} . \mathrm{§5Def2} : \supset : C < (m+1)A$

(ε) » $NA \frown (B + G) = \Lambda . (\alpha) . (\beta) . (\gamma) . (\delta) : \supset : l'(NA) \varepsilon G . H \varepsilon NA .$ $H > l'(NA) . -=_H \Lambda .$

(ε) $\mathrm{P1} . \mathrm{§3P25} : \supset .\!\cdot . A, B \varepsilon G . NA \frown (B + G) = \Lambda : = \Lambda . \mathrm{I§3P8} .\!\cdot \supset .\!\cdot \mathrm{P5}$]

5'. $\mathrm{Pp8}_1 = \mathrm{P5}$

6. $A \varepsilon KG . n \varepsilon N . l'A \varepsilon G . \supset . l'(nA) = n(l'A)$ [1.3.4.5.6.7.8]

(α) Hp. $\mathrm{P2} . \mathrm{Pp8} : \supset : l'(nA) \varepsilon G .$

(β_1) » $X \varepsilon G . X < l'(nA) . \mathrm{Def1} : \supset : A' \varepsilon A . X < nA' . -=_{A'} \Lambda$

(β_2) » $X \varepsilon G . A' \varepsilon A . X < nA' . \mathrm{P1} : \supset : X < n(l'A)$

(β) » $(\alpha) . (\beta_1) . (\beta_2) : \supset : X \varepsilon G . X < l'(nA) . \supset . X < n(l'A) .$

(γ_1) » $X \varepsilon G . X < n(l'A) . \mathrm{§5P50} : \supset : Y \varepsilon G . X < nY < n(l'A) . -=_Y \Lambda$

(γ_2) » $X, Y \varepsilon G . X < nY < n(l'A) : \supset : Y < l'A : \supset : A' \varepsilon A . Y < A' . -=_{A'} \Lambda$

(γ_3) » $A' \varepsilon A . Y < A' : \supset : X < nA' : \supset :$ $X < l'(nA)$

(γ) Hp. $(\alpha) . (\gamma_1) . (\gamma_2) . (\gamma_3) : \supset : X \varepsilon G . X < l'(nA) . \supset . X < n(l'A)$

» $(\beta) . (\gamma) . \mathrm{Def2} : \supset : \mathrm{Ts}$]

7. $A \varepsilon G . n \varepsilon N . \supset . l'(G \frown \overline{X \varepsilon} (X \varepsilon nG . X \stackrel{=}{<} A)) = A$ [1.3.4.5.6.7.8]

[(α_1) Hp. $Y \varepsilon G . Y < A . \mathrm{§5P50} : \supset : Z \varepsilon G . Y < nZ < A . -=_Z \Lambda$

(α_2) » $Y, Z \varepsilon G . Y < nZ < A : \supset : Y < l'(G \frown \overline{X \varepsilon} (X \varepsilon nG . X \stackrel{=}{<} A))$

(α) » $(\alpha_1) . (\alpha_2) : \supset : Y \varepsilon G . Y < A . \supset . Y < l'(G \frown \overline{X \varepsilon} (X \varepsilon nG . X \stackrel{=}{<} A))$

(β) » $Y \varepsilon G . Y < l'(G \frown \overline{X \varepsilon} (X \varepsilon nG . X \stackrel{=}{<} A)) : \supset : Y < A$

» $(\alpha) . (\beta) . \mathrm{Def2} : \supset : \mathrm{Ts}$]

8. $A \varepsilon G . n \varepsilon N . \supset . \frac{1}{n} A \varepsilon G$ [1.3.4.5.6.7.8]

[(α) Hp. $P6 . Pp8 : \supset : H \,\varepsilon\, G . l'(G \cap \overline{nX \,\varepsilon\, (nX \leqq A)}) = nH . - =_{H} \Lambda .$

(β) » $H \,\varepsilon\, G . l'(G \cap \overline{nX \,\varepsilon\, (nX \leqq A)}) = nH . P7 : \supset : nH = A$

» (α) . (β) . §6Def1 : $\supset$: Ts]

8'. $Pp8_2 = P8$

9. $a \,\varepsilon\, KR . l'a \,\varepsilon\, Q . A \,\varepsilon\, G . \supset . l'(aA) \,\varepsilon\, G$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]

[(α) Hp. §6P11 : $\supset$: $aA \,\varepsilon\, KG$.

(β) » $Tq : \supset : b \,\varepsilon\, R . a \cap (b + R) = \Lambda . - =_{b} \Lambda .$

(γ) » $b \,\varepsilon\, R . a \cap (b+R) = \Lambda : \supset : B \,\varepsilon\, G . aA \cap (B+G) = \Lambda . - =_{B} \Lambda$

» (α) . (β) . (γ) . Pp8 : $\supset$: Ts]

10. $A, B \,\varepsilon\, G . a \,\varepsilon\, KR . l'a \,\varepsilon\, Q . A = B . \supset . l'(aA) = l'(aB)$ [1.3.4.5.6.7.8]

11. $A \,\varepsilon\, G . a, b \,\varepsilon\, KR . l'a, l'b \,\varepsilon\, Q . l'a = l'b . \supset . l'(aA) = l'(bA)$ [»]

[(α) Hp. P9 : $\supset$: $l'(aA), l'(bA) \,\varepsilon\, G$.

(β_1) » $X \,\varepsilon\, G . X < l'(aA)$. Def 1 : $\supset$: $a' \varepsilon\, a . X < a'A . - =_{a'} \Lambda$

(β_2) » $a' \varepsilon\, a$. Tq : $\supset$: $b' \varepsilon\, b . a' < b' . - =_{b'} \Lambda$

(β_3) » $a' \varepsilon\, a . b' \varepsilon\, b . a' < b' . X \,\varepsilon\, G . X < a'A : \supset : X < b'A$

(β_4) » $b' \varepsilon\, b . X \,\varepsilon\, G . X < b'A : \supset : bA \cap (X+G) - = \Lambda : \supset : X < l'(bA)$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2) . (\beta_3) . (\beta_4) : \supset : X \,\varepsilon\, G . X < l'(aA) . \supset . X < l'(bA)$

(γ) » $\begin{pmatrix} a, b \\ b, a \end{pmatrix} \beta : \supset : X \,\varepsilon\, G . X < l'(bA) . \supset . X < l'(aA)$.

» (α) . (β) . (γ) : $\supset$: Ts]

12. $A \,\varepsilon\, G . a, b \,\varepsilon\, KR . l'a, l'b \,\varepsilon\, Q . \supset . l'(a(bA)) = l'((ab)A)$ [1.3.4.5.6.7.8]

13. $A, B \,\varepsilon\, KG . A - = \Lambda . B - = \Lambda . C \,\varepsilon\, G . (A \cup B) \cap (C+G) = \Lambda . \supset . l'(A+B) = l'A + l'B$ [1.3.4.5.6.7.8]

[(α) Hp. : $\supset$: $A+B \cap (2C+G) = \Lambda$. Hp. Pp8 : $\supset$: $l'(A+B), l'A, l'B \,\varepsilon\, G$.

(β_1) » $X \,\varepsilon\, G . X < l'A + l'B$. (α).§5P41 : $\supset$: $X_1, X_2 \,\varepsilon\, G . X_1 + X_2 = X . X_1 < l'A . X_2 < l'B . - =_{X_1, X_2} \Lambda$

(β_2) » $X_1, X_2 \,\varepsilon\, G . X_1 < l'A . X_2 < l'B : \supset : A' \varepsilon\, A : B' \varepsilon\, B . X_1 < A' . X_2 < B' . - =_{A', B'} \Lambda$

(β_3) » $X, X_1, X_2 \,\varepsilon\, G . A' \varepsilon\, A . B' \varepsilon\, B . X = X_1 + X_2 . X_1 < A' . X_2 < B' : \supset : X < A' + B' : \supset : A+B \cap (X+G) - = \Lambda$.

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2) . (\beta_3) : \supset : X \,\varepsilon\, G . X < l'A + l'B . \supset . X < l'(A+B)$.

(γ_1) » $Y \,\varepsilon\, G . Y < l'(A+B) : \supset : A' \varepsilon\, A . B' \varepsilon\, B . Y < A' + B' . - =_{A', B'} \Lambda$

(γ_2) » $A' \varepsilon\, A . B' \varepsilon\, B . P1 : \supset : A' \leqq l'A . B' \leqq l'B$. (α) : $\supset$: $A' + B' \leqq l'A + l'B$

(γ_3) » » $Y \,\varepsilon\, G . Y < A' + B'$. ($\gamma_2$) : $\supset$: $Y < l'A + l'B$

(γ) » $(\gamma_1) . (\gamma_2) . (\gamma_3) : \supset : Y \,\varepsilon\, G . Y < l'(A+B) . \supset . Y < l'A + l'B$.

» (α) . (β) . (γ) . Def 2 : $\supset$: Ts]

14. $A \varepsilon G . a \varepsilon KR . l'a \varepsilon R . \supset . l'(aA) = (l'a)A$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

[(α) Hp. P9 . §6P11 : $\supset$: $l'(aA), (l'a)A \varepsilon G$.

(β_1) » $X \varepsilon G . X < (l'a)A . (\alpha) . §6P29 : \supset : x \varepsilon R . X < xA < (l'a)A . - =_x \Lambda$

(β_2) » $X \varepsilon G . x \varepsilon R . xA < (l'a)A : \supset : x < l'a . Tq : \supset : a' \varepsilon a . x < a' . - =_{a'} \Lambda$

(β_3) » $X \varepsilon G . a' \varepsilon a . x \varepsilon R . X < xA . x < a' : \supset : X < a'A : \supset : aA \cap (X + G) - = \Lambda$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2) . (\beta_3) : \supset : X \varepsilon G . X < (l'a)A . \supset . X < l'(aA)$

(γ_1) » $Y \varepsilon G . Y < l'(aA) : \supset : a' \varepsilon a . Y < a'A . - =_{a'} \Lambda$

(γ_2) » $a' \varepsilon a . Tq : \supset : a' \leqq l'a$. Hp. $: \supset : a'A \leqq (l'a)A$

(γ) » $(\gamma_1) . (\gamma_2) : \supset : Y \varepsilon G . Y < l'(aA) . \supset . Y < (l'a)A$

» $(\alpha) . (\beta) . (\gamma)$. Def 2 : $\supset$: Ts]

§ 8.

$A, B \varepsilon G . m, n \varepsilon Q . \supset :$

1. $mA \varepsilon G$. **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

[Hp. Def 1, 2 : $\supset$: $mA = l'\{(R \cap \overline{x \varepsilon} (x \leqq m))A\}$. §7P9 . Tq . I§4P10 : $\supset$: Ts]

2. $QG = G$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

3. $a \varepsilon KR . l'a = m . \supset . mA = (l'a)A$ [»]

[Hp. Tq : $\supset$: $l'a = l'(R \cap \overline{x \varepsilon} (x \leqq m))$. §7P11 . Def 1, 2 : $\supset$: Ts]

4. $A = B . \supset . nA = nB$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

5. $m = n . \supset . mA = nA$ [»]

6. $A = B . m = n . \supset . mA = nB$ [»]

7. $m(A + B) = mA + mB$ [»]

[(α) Hp. Tq : $\supset$: $a \varepsilon KR . l'a = m . - =_a \Lambda$

(β) » $a \varepsilon KR \, l'a \varepsilon Q$. §6P11 : $\supset$: $aA, aB \varepsilon KG$

(γ) » $a \varepsilon KR . l'a \varepsilon Q . (\beta)$. §7P13 : $\supset$: $l'(aA + aB) = l'(aA) + l'(aB)$

» $(\alpha) . (\gamma)$. P3 . §7P9 . Def 1, 2 : $\supset$: Ts]

7'. $a \varepsilon N . f \varepsilon G|Z_a . \supset . m(\Sigma_1{}^a f) = \Sigma_1{}^a(mf)$. **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

8. $(m + n)A = mA + nA$ [»]

8'. $a \varepsilon N . f \varepsilon Q|Z_a . \supset . (\Sigma_1{}^a f)A = \Sigma_{r=1}^{r=a}(fr)A$ [»]

9. $m(nA) = (mn)A$ [»]

10. $A > B . \supset . mA > mB$ [»]

11. $m > n . \supset . mA > nA$ [»]

12. $A > B . m \geqq n . \supset . mA > nB$ [»]

13. $A \geqq B . m > n . \supset . mA > nB$ [»]

14. $mA = mB . \supset . A = B$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]
15. $mA > mB . \supset . A > B$ [»]
16. $mA = nA . \supset . m = n$ [»]
17. $mA > nA . \supset . m > n$ [»]
18. $A > B . \supset . m(A - B) = mA - mB$ [»]
19. $m > n . \supset . (m - n)A = mA - nA$ [»]

§ 9.

$A, B, C, D, U, U' \varepsilon G . \supset :$

1. $\mathrm{l}'(A/U) -= \Lambda$ [1 . 3 . 4 . 5 . 8_1]

[(α_1) $\mathrm{Tr} . \supset : x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . nx \overline{\overline{<}} n . -=_{n,x} \Lambda$

(α_2) $\mathrm{Hp} . x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . nx \overline{\overline{<}} n . U \overline{\overline{<}} A$. §5 P5, 11, 12, 13 $: \supset :$ $(nx)U \overline{\overline{<}} nA$

(α) » $U \overline{\overline{<}} A . (\alpha_1) . (\alpha_2) : \supset : x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_{n,x} \Lambda$

(β_1) » $U > A . \mathrm{Pp}8_1 : \supset : n \varepsilon N . U \overline{\overline{<}} nA . -=_n \Lambda$

(β_2) » $n \varepsilon N . \mathrm{Tr} : \supset : x \varepsilon R . nx = 1 . -=_x \Lambda$

(β_3) » $x \varepsilon R . n \varepsilon N . U \overline{\overline{<}} nA . nx = 1$. §5 P5, 11 $: \supset : (nx)U \overline{\overline{<}} nA$

(β) » $U > A . (\beta_1) . (\beta_2) . (\beta_3) : \supset : x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_{n,x} \Lambda$

» $(\alpha) . (\beta) . \mathrm{Pp}5 : \supset : \mathrm{Ts}$]

2. $A/U \varepsilon Q$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]

[(α) Hp. Def1, 2 . P1 $: \supset : x \varepsilon \mathrm{l}'(A/U) . n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_{n,x} \Lambda$

(β) » $n \varepsilon N$. §5P31 $: \supset : m \varepsilon N . nA \overline{\overline{<}} mU . -=_m \Lambda$

(γ) » $x \varepsilon R . m, n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA \overline{\overline{<}} mU$. §3P1, 2 $: \supset : (nx)U$ $\overline{\overline{<}} mU$. §5P16, 17 $: \supset : nx \overline{\overline{<}} m . \mathrm{Tr} : \supset : x \overline{\overline{<}} \frac{m}{n}$.

(δ) » $(\alpha) . (\beta) . (\gamma) . \mathrm{Tr} : \supset .\because h \varepsilon R . \mathrm{l}'(A/U) \cap (h + R) = \Lambda : -=_h \Lambda$

» $(\delta) . \mathrm{Tq} : \supset : \mathrm{Ts}$]

3. $\overline{\mathrm{l}}'(A/U) = R \cap \overline{x \varepsilon} (xU \overline{\overline{<}} A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

[(α_1) Hp. $x \varepsilon R . x \varepsilon \overline{\mathrm{l}}'(A/U)$. Def1, 2 $: \supset : n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA . -=_n \Lambda$

(α_2) » $x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA$. §6P18, 23, 24 $: \supset : xU \overline{\overline{<}} A$

(α) » $(\alpha_1) . (\alpha_2) : \supset : x \varepsilon R . x \varepsilon \overline{\mathrm{l}}'(A/U) . \supset . x \varepsilon \left(R \cap \overline{x \varepsilon} (xU \overline{\overline{<}} A)\right)$

(β_1) » $x \varepsilon \left(R \cap \overline{x \varepsilon} (xU \overline{\overline{<}} A)\right) . n, nx \varepsilon N$. §5P3, 9 . §6P18 $: \supset : (nx)U \overline{\overline{<}} A$

(β_2) » $x \varepsilon R : \mathrm{Tr} : \supset : n, nx \varepsilon N . -=_n \Lambda$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2) : \supset : x \varepsilon \left(R \cap \overline{x \varepsilon} (xU \overline{\overline{<}} A)\right) . \supset . x \varepsilon \overline{\mathrm{l}}'(A/U)$

» $(\alpha) . (\beta)$. I §4P2 $: \supset : \mathrm{Ts}$]

4. $(A/U)U = A$ **[1.3.4.5.6.7.8]**

[(α) Hp. P2 . §8P1 : $\supset$: $(A/U)U \,\varepsilon\, G$.

(β_1) » (α) . $X \,\varepsilon\, G$. $X < (A/U)U$. Def1, 2 . P3 : $\supset$: $x \,\varepsilon\, \overline{l'}(A/U)$. $X < xU$. $- =_x \Lambda$

(β_2) » $X \,\varepsilon\, G$. $x \,\varepsilon\, \overline{l'}(A/U)$. $X < xU$. P3 : $\supset$: $X < A$

(β) » (β_1) . (β_2) : $\supset$: $X \,\varepsilon\, G$. $X < (A/U)U$. $\supset$. $X < A$

(γ_1) » $X \,\varepsilon\, G$. $X < A$. §6P29 : $\supset$: $x \,\varepsilon\, R$. $X < xU < A$. $- =_x \Lambda$

(γ_2) » $X \,\varepsilon\, G$. $x \,\varepsilon\, R$. $X < xU < A$: $\supset$: $X < l'\{(\overline{l'}(A/U))U\}$

(γ) » (γ_1) . (γ_2) : $\supset$: $X \,\varepsilon\, G$. $X < A$. $\supset$. $X < (A/U)U$

» (α) . (β) . (γ) . Def1, 2 . §8Def2 : $\supset$: Ts]

4'. $G = QU$ **[1.3.4.5.6.7.8]**

5. $A = B$. $\supset$. $A/U = B/U$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

[Hp. §5P3.§3P1.Def1, 2.I §4P2:$\supset$:$\overline{l'}(A/U)=\overline{l'}(B/U)$.P1, 2.Tq:$\supset$:Ts]

6. $U = U'$. $\supset$. $A/U = A/U'$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

7. $A > B$. $\supset$. $A/U > B/U$ [»]

[(α) Hp. §5P33 : $\supset$: $m, n \,\varepsilon\, N$. $mA > nU > mB$. $- =_{m,n} \Lambda$

(β) » $m, n \,\varepsilon\, N$. $mA > nU > mB$. §5P4 : $\supset$: $mA > \left(m\frac{n}{m}\right)U > mB$

(γ) » P1.(α).(β):$\supset$.·.$h \,\varepsilon\, \overline{l'}(A/U)$.$\overline{l'}(B/U) \cap (h+R \cup \iota h) = \Lambda$: $- =_h \Lambda$

» P2 . Tq : $\supset$: Ts]

8. $U > U'$. $\supset$. $A/U < A/U'$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

9. $A/U = B/U$. $\supset$. $A = B$ [»]

[P7.§3P21.P2.Tq :$\supset$: $A, B, U \,\varepsilon\, G$.$A -= B$.$\supset$.$A/U -= B/U$.I §2P1 :$\supset$: P9]

10. $A/U = A/U'$. $\supset$. $U = U'$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

11. $A/U > B/U$. $\supset$. $A > B$ [»]

12. $A/U > A/U'$. $\supset$. $U < U'$ [»]

13. $(A + B)/U = A/U + B/U$ **[1.3.4.5.6.7.8_1]**

[(α_1) Hp. $x \,\varepsilon\, \overline{l'}(A/U)$. $y \,\varepsilon\, \overline{l'}(B/U)$. Def 1, 2 . P1 : $\supset$: $n, nx, ny \,\varepsilon\, N$. $(nx)U \,\overline{\overline{<}}\, nA$. $(ny)U \,\overline{\overline{<}}\, nB$. $- =_n \Lambda$

(α_2) » $x, y \,\varepsilon\, R$. $n, nx, ny \,\varepsilon\, N$. $(nx)U \,\overline{\overline{<}}\, nA$. $(ny)U \,\overline{\overline{<}}\, nB$: $\supset$: $(n(x + y))U \,\overline{\overline{<}}\, n(A + B)$

(α) » (α_1) . (α_2) : $\supset$: $\overline{l'}(A/U) + \overline{l'}(B/U) \supset \overline{l'}((A + B)/U)$

(β_1) » $z \,\varepsilon\, \overline{l'}((A + B)U)$. Def1, 2 . P1 : $\supset$: $n, nz \,\varepsilon\, N$. $(nz)U \,\overline{\overline{<}}\, n(A + B)$. $- =_n \Lambda$

(β_2) Hp. $z \varepsilon \mathrm{R} . n, nz \varepsilon \mathrm{N} . (nz)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} n(\mathrm{A}+\mathrm{B})$. §5P47 : ɔ : $x, y \varepsilon \mathrm{R} . m, mx, my \varepsilon \mathrm{N} . x+y=z . (mx)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} m\mathrm{A} . (my)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} m\mathrm{B} . -=_{m,x,y} \Lambda$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2)$: ɔ : $\bar{\mathrm{l}}'((\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{U})$ ɔ $\bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{A}/\mathrm{U}) + \bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{B}/\mathrm{U})$

» Def 2 . I §4P2 . (α) . (β) : ɔ : $\bar{\mathrm{l}}'((\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{U}) = \bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{A}/\mathrm{U}) + \mathrm{l}'(\mathrm{B}/\mathrm{U})$. P2 . Def 1, 2 . Tq : ɔ : Ts]

13'. $n \varepsilon \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}|\mathrm{Z}_n$. ɔ . $(\Sigma_1{}^n f)/\mathrm{U} = \Sigma_1{}^n(f/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8_1]**

14. $\mathrm{A} > \mathrm{B}$. ɔ . $(\mathrm{A}-\mathrm{B})/\mathrm{U} = \mathrm{A}/\mathrm{U} - \mathrm{B}/\mathrm{U}$ [»]

[Hp. :ɔ:A=B+(A−B).P5, 13:ɔ:A/U=B/U+(A−B)U.P2.Tq:ɔ:Ts]

15. $a \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ . $(a\mathrm{A})/\mathrm{U} = a(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]**

[(α_1) Hp. $x \varepsilon \bar{\mathrm{l}}'((a\mathrm{A})/\mathrm{U})$.Def1, 2.P1:ɔ:$n, nx \varepsilon \mathrm{N}.(nx)\mathrm{U}\overline{\overline{<}}n(a\mathrm{A}).-=_n \Lambda$

(α_2) » $x \varepsilon \mathrm{R} . n, nx \varepsilon \mathrm{N} . (nx)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} n(a\mathrm{A})$. §5P20, 25 . Tr : ɔ : $m, m\frac{x}{a} \varepsilon \mathrm{N} . \left(m\frac{x}{a}\right)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} m\mathrm{A} . -=_m \Lambda$

(α) » $(\alpha_1) . (\alpha_2)$: ɔ : $\bar{\mathrm{l}}'((a\mathrm{A})/\mathrm{U})$ ɔ $a(\bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{A}/\mathrm{U}))$

(β_1) » $x \varepsilon a\bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{A}/\mathrm{U})$. Def1, 2 : ɔ : $n, n\frac{x}{a} \varepsilon \mathrm{N} . \left(n\frac{x}{a}\right)\mathrm{U}\overline{\overline{<}}n\mathrm{A}.-=_n \Lambda$

(β_2) » $x \varepsilon \mathrm{R} . n, n\frac{x}{a} \varepsilon \mathrm{N} . \left(n\frac{x}{a}\right)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} n\mathrm{A}$. ɔ . $(nx)\mathrm{U} \overline{\overline{<}} n(a\mathrm{A})$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2)$: ɔ : $a(\bar{\mathrm{l}}'(\mathrm{A}/\mathrm{U}))$ ɔ $\bar{\mathrm{l}}'((a\mathrm{A})/\mathrm{U})$

» $(\alpha) . (\beta)$. P2 . Tq : ɔ : Ts]

16. $a \varepsilon \mathrm{R}$. ɔ . $(a\mathrm{A})/\mathrm{U} = a(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]**

17. $a \varepsilon \mathrm{Q}$. ɔ . $(a\mathrm{A})/\mathrm{U} = a(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

[Hp. §8P1 : ɔ : $a\mathrm{A} \varepsilon \mathrm{G}$. P4 : ɔ : $((a\mathrm{A})/\mathrm{U})\mathrm{U} = a\mathrm{A}$. P4 : ɔ : $((a\mathrm{A})/\mathrm{U})\mathrm{U} = a((\mathrm{A}/\mathrm{U})\mathrm{U})$. P2 . §8P9 : ɔ : $((a\mathrm{A})/\mathrm{U})\mathrm{U} = (a(\mathrm{A}/\mathrm{U}))\mathrm{U}$. §8 P16 : ɔ : Ts]

18. $a \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ . $(a\mathrm{U})/\mathrm{U} = a$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6]**

[(α) Hp. Def 1, 2 : ɔ : $a \varepsilon \bar{\mathrm{l}}'((a\mathrm{U})/\mathrm{U})$

(β_1) » $x \varepsilon \mathrm{l}'((a\mathrm{U})/\mathrm{U})$.Def1, 2.P1:ɔ:$n, nx \varepsilon \mathrm{N}.(nx)\mathrm{U}\overline{\overline{<}}n(a\mathrm{U}).-=_n \Lambda$

(β_2) » $x \varepsilon \mathrm{R}.n, nx \varepsilon \mathrm{N}.(nx)\mathrm{U}\overline{\overline{<}}n(a\mathrm{U})$. §5P8, 16, 17 . Tr :ɔ: $x \overline{\overline{<}} a$

(β) » $(\beta_1) . (\beta_2)$: ɔ : $x \varepsilon \bar{\mathrm{l}}'((a\mathrm{U})/\mathrm{U})$. ɔ . $x \overline{\overline{<}} a$

» $(\alpha) . (\beta)$. Def1, 2 . Tq : ɔ : Ts]

19. $\mathrm{A}/\mathrm{A} = 1$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]**

[Hp. §5 Def1 : ɔ : 1A = A . P5 : ɔ : (1A)/A = A/A . P18 : ɔ : Ts]

20. $a \varepsilon \mathrm{R}$. ɔ . $(a\mathrm{U})/\mathrm{U} = a$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]**

[Hp. P16 : ɔ : $(a\mathrm{U})/\mathrm{U} = a(\mathrm{U}/\mathrm{U})$. P19 . Tr : ɔ : Ts]

21. $a \varepsilon Q . \supset . (aU)/U = a$ [1.3.4.5.6.7.8]

[Hp. P17 : $\supset$: $(aU)/U = a(U/U)$ .. P19 . Tq : $\supset$: Ts]

21'. $A = B . = . A/B = 1$ [1.3.4.5.6.8_1]

[(α) Hp. $A = B$. P5, 19 : $\supset$: $A/B = 1$

(β) » $A/B = 1$. P19 : $\supset$: $A/B = B/B$. P9 : $\supset$: $A = B$

» (α) . (β) : $\supset$: Ts]

21''. $A > B . = . A/B > 1$ [1.3.4.5.6.8_1]

21'''. $A < B . = . A/B < 1$ ["]

22. $a \varepsilon N . \supset : A/U = a . = . A = aU$ ["]

[(α) Hp. $A/U = a$. P18 : $\supset$: $A/U = (aU)/U$. P9 : $\supset$: $A = aU$

(β) » $A = aU$. P5, 18 : $\supset$: $A/U = a$

(α) . (β) : $\supset$: Ts]

23. $a \varepsilon R . \supset : A/U = a . = . A = aU$ [1.3.4.5.6.8_1.8_2]

24. $a \varepsilon Q . \supset : A/U = a . = . A = aU$ [1.3.4.5.6.7.8]

25. $a \varepsilon N . \supset : A/U > a . = . A > aU$ [1.3.4.5.6.8_1]

[(α) Hp. $A/U > a$. P18 : $\supset$: $A/U > (aU)/U$. P11 : $\supset$: $A > aU$

(β) » $A > aU$. P7 : $\supset$: $A/U > (aU)/U$. P18 : $\supset$: $A/U > a$

(α) . (β) : $\supset$: Ts]

26. $a \varepsilon R . \supset : A/U > a . = . A > aU$ [1.3.4.5.6.8_1.8_2]

27. $a \varepsilon Q . \supset : A/U > a . = . A > aU$ [1.3.4.5.6.7.8]

31. $a \varepsilon N . \supset . (aA)/(aU) = A/U$ [1.3.4.5.6.8_1]

[(α_1) Hp. $x \varepsilon \overline{\Gamma}\big((aA)/(aU)\big)$. Def1, 2 . P1 : $\supset$: $n, nx \varepsilon N . (nx)(aU) \overline{\overline{<}} n(aA) . -=_x \Lambda$

(α_2) » $x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . (nx)(aU) \overline{\overline{<}} n(aA)$. §5 P8, 14, 15 : $\supset$: $(nx)U \overline{\overline{<}} nA$

(α) » (α_1) . (α_2) : $\supset$: $\overline{\Gamma}\big((aA)/(aU)\big) \supset \overline{\Gamma}(A/U)$

(β_1) » $x \varepsilon \overline{\Gamma}(A/U)$. Def1, 2 . P1 : $\supset$: $n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA -=_x \Lambda$

(β_2) » $x \varepsilon R . n, nx \varepsilon N . (nx)U \overline{\overline{<}} nA$. §5 P3, 9, 8 : $\supset$: $(nx)(aU) \overline{\overline{<}} n(aA)$

(β) » (β_1) . (β_2) : $\supset$: $\overline{\Gamma}(A/U) \supset \overline{\Gamma}\big((aA)/(aU)\big)$

» (α) . (β) : $\supset$: $\overline{\Gamma}\big((aA)/(aU)\big) = \overline{\Gamma}(A/U)$. Def1, 2 . P2 . Tq : $\supset$: Ts]

32. $a \varepsilon R . \supset . (aA)/(aU) = A/U$ [1.3.4.5.6.8_1.8_2]

33. $a \varepsilon Q . \supset . (aA)/(aU) = A/U$ [1.3.4.5.6.7.8]

34. $a \varepsilon N . \supset . A/(aU) = \frac{1}{a}(A/U)$ [1.3.4.5.6.8_1]

[Hp. P31, 15 : ɔ : $a\big(\mathrm{A}/(a\mathrm{U})\big) = \mathrm{A}/\mathrm{U}$. P2 . Tq : ɔ : Ts]

35. $a \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, ɔ \,.\, \mathrm{A}/(a\mathrm{U}) = \frac{1}{a}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]**

36. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, ɔ \,.\, \mathrm{A}/(a\mathrm{U}) = \frac{1}{a}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]**

37. $(\mathrm{A}/\mathrm{B})(\mathrm{B}/\mathrm{U}) = \mathrm{A}/\mathrm{U}$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]**

[(α_1) Hp. $a \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \,.\, b \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{B}/\mathrm{U})$. Def1, 2 . P1 . Tr : ɔ : $n, na, nb \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.
$(na)\mathrm{B} \mathrel{\overline{\overline{<}}} n\mathrm{A} \,.\, (nb)\mathrm{U} \mathrel{\overline{\overline{<}}} n\mathrm{B} \,.\, -=_n \Lambda$

(α_2) » $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, n, na, nb \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, (na)\mathrm{B} \mathrel{\overline{\overline{<}}} n\mathrm{A} \,.\, (nb)\mathrm{U}$
$\mathrel{\overline{\overline{<}}} n\mathrm{B}$. §5P3, 9, 8 . §3P1, 2 . Tr : ɔ : $(n^2ab)\mathrm{U} \mathrel{\overline{\overline{<}}} n^2\mathrm{A}$

(α) » (α_1) . (α_2) : ɔ : $\{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{B})\} \times \{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{B}/\mathrm{U})\}$ ɔ $\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$

(β_1) » $c \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$. Def1, 2 : ɔ : $n, nc \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, (nc)\mathrm{U} \mathrel{\overline{\overline{<}}} n\mathrm{A} \,.\, -=_n \Lambda$

(β_2) » $c \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, n, nc \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, (nc)\mathrm{U} < \mathrm{A}$. §5P33 :ɔ: $n', m \,\varepsilon\, \mathrm{N}.(n'nc)\mathrm{U}$
$< m\mathrm{B} < (n'n)\mathrm{A} \,.\, -=_{n', m} \Lambda$

(β_3) » $c \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, n, nc, n', m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, (n'nc)\mathrm{U} < m\mathrm{B} < (n'n)\mathrm{A}$. Tn. Tr.
§5P4 . §3P1 : ɔ : $\left(m\frac{n'nc}{m}\right)\mathrm{U} < m\mathrm{B} \,.\, \left(n'n\frac{m}{n'n}\right)\mathrm{B} < (n'n)\mathrm{A}$

(β_4) » (β_1) . (β_2) . (β_3) . Tr. : ɔ : $c \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$. ɔ . $y, z \,\varepsilon\, \mathrm{R} \,.\, yz = c$.
$y \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) \,.\, z \,\varepsilon\, \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{B}/\mathrm{U}) \,.\, -=_{x, y} \Lambda$

(β) » (β_4) : ɔ : $\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$ ɔ $\{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{B})\} \times \{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{B}/\mathrm{U})\}$

» (α) . (β) : ɔ : $\{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{B})\} \times \{\overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{B}/\mathrm{U})\} = \overline{\mathrm{l}'}(\mathrm{A}/\mathrm{U})$. **Def1, 2 . P2 .**
Tq : ɔ : Ts]

37'. $\mathrm{A}/\mathrm{B} = (\mathrm{A}/\mathrm{U})/(\mathrm{B}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]**

37''. $n \,\varepsilon\, 2 + \mathrm{N} \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{G}/\mathrm{Z}_n \,.\, ɔ \,.\, \Pi_{r=1}^{r=n-1}\{(fr)/(f(r+1))\} = (f1)/(fn)$
[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]

38. $\mathrm{A}/\mathrm{U} = 1/(\mathrm{U}/\mathrm{A})$ [»]

[Hp. P31 : ɔ : $(\mathrm{A}/\mathrm{U})(\mathrm{U}/\mathrm{A}) = \mathrm{A}/\mathrm{A}$. P19 : ɔ : $(\mathrm{A}/\mathrm{U})(\mathrm{U}/\mathrm{A}) = 1$. P2 .
Tq : ɔ : Ts]

39. $\mathrm{A}/\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathrm{U} \,.=.\, \mathrm{A}/\mathrm{U} = (\mathrm{B}/\mathrm{U})(\mathrm{C}/\mathrm{U})$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1]**

40. $\mathrm{A}/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{D} \,.=.\, (\mathrm{A}/\mathrm{U})/(\mathrm{B}/\mathrm{U}) = (\mathrm{C}/\mathrm{U})/(\mathrm{D}/\mathrm{U})$ [»]

41. » . ɔ . $\mathrm{A}/\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathrm{D}$ [»]

42. » . ɔ . $\mathrm{D}/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{A}$ [»]

43. » . ɔ . $\mathrm{B}/\mathrm{A} = \mathrm{D}/\mathrm{C}$ [»]

44. » . ɔ . $(\mathrm{A}+\mathrm{B})/\mathrm{B} = (\mathrm{C}+\mathrm{D})/\mathrm{D}$ **[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8_1]**

[Hp. P2 . Tq . P19 : ɔ : $\mathrm{A}/\mathrm{B} + \mathrm{B}/\mathrm{B} = \mathrm{C}/\mathrm{D} + \mathrm{D}/\mathrm{D}$. P13 : ɔ : Ts]

45. $A/B = C/D \,.\, A > B \,.\supset.\, (A - B)/B = (C - D)/D$ $[1.3.4.5.6.7.8_1]$

46. » $.\supset.\, (A + B)/(A - B) = (C + D)/(C - D)$ $[1.3.4.5.6.7.8_1]$

47. $H \,\varepsilon\, KG \,.\, U \,\varepsilon\, H \,.\, H/U \,\varepsilon\, KR \,.\supset:\, U' \varepsilon\, H \,.\supset_{U'}.\, H/U' \varepsilon\, KR$ $[1.3.4.5.6.8_1]$

$[$Hp. $B,\ U' \varepsilon\, H \,.\, P31 \,.\, Tq :\supset:\, B/U' = (B/U) \times \big(1/(U'/U)\big)$.Hp.Tr$:\supset:Ts]$

§ 10.

$V,\ V',\ V_1,\ V_2,\ V_3 \,\varepsilon\, KG \,.\supset:$

1. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV') .\cdot. = .\cdot. \omega \,\varepsilon\, (V'/V)\,sim : A,\ B \,\varepsilon\, V .\supset_{A,B}. A/B = (\omega A)/(\omega B)$ (Def)

2. $\omega \,\varepsilon\, (pi.VV') .\cdot. = .\cdot. \omega \,\varepsilon\, (V'/V)\,sim : A,\ B \,\varepsilon\, V .\supset_{A,B}. A/B = (\omega B)/(\omega A)$ (Def)

3. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV') \,.\, A,\ B \,\varepsilon\, V \,.\supset:\, A = B \,.=.\, \omega A = \omega B$

   $[$Hp. P1 . I §5P25 $:\supset:$ Ts$]$

4. $\omega \,\varepsilon\, (pi.VV') \,.\, A,\ B \,\varepsilon\, V \,.\supset:\, A = B \,.=.\, \omega A = \omega B$

5. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV') \,.\supset.\, \bar{\omega} \,\varepsilon\, (pd.V'V)$ $[1.3.4.5.6.8_1]$

   $[(\alpha)$ Hp. P1 . I §5P22 $:\supset:\, \bar{\omega} \,\varepsilon\, (V/V')\,sim$

   (β) » $A,\ B \,\varepsilon\, V$. P1 . I §5P23 $:\supset:\, \bar{\omega}(\omega A) = A \,.\, \bar{\omega}(\omega B) = B$. §9P5, 6 . P1 $:\supset:\, (\omega A)/(\omega B) = \big(\bar{\omega}(\omega A)\big)/\big(\bar{\omega}(\omega B)\big)$

   » $(\alpha) . (\beta)$. P1 $:\supset:$ Ts$]$

6. $\omega \,\varepsilon\, (pi.VV') \,.\supset.\, \omega \,\varepsilon\, (pi.V'V)$ $[1.3.4.5.6.8_1]$

7. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV') \,.\, A,\ B \,\varepsilon\, V \,.\supset:\, A > B \,.=.\, \omega A > \omega B$ [»]

   $[(\alpha)$ Hp. $A > B$.§9P21''.P1.Tq $:\supset:\, (\omega A)/(\omega B) > 1$.§9P21'' $:\supset:\, \omega A > \omega B$

   (β) » $\omega A > \omega B \,.\, (\alpha)$. P5 $:\supset:\, \bar{\omega}(\omega A) > \bar{\omega}(\omega B)$. I §5P23 $:\supset:\, A > B$

   » $(\alpha) . (\beta) :\supset:$ Ts$]$

8. $\omega \,\varepsilon\, (pi.VV').A,\ B \,\varepsilon\, V \,.\supset:\, A > B \,.=.\, \omega A < \omega B$ $[1.3.4.5.6.8_1]$

9. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV').a \,\varepsilon\, N.A,\ aA \,\varepsilon\, V.\supset.\omega(aA) = a(\omega A)$ [»]

   $[$Hp. P1 $:\supset:\, (aA)/A = \big(\omega(aA)\big)/(\omega A)$. §9P18 $:\supset:\, a = \big(\omega(aA)\big)/(\omega A)$. §9P22 $:\supset:$ Ts$]$

9'. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV') \,.\, a \,\varepsilon\, R \,.\, A,\ aA \,\varepsilon\, V \,.\supset.\, \omega(aA) = a(\omega A)$ $[1.3.4.5.6.8_1.8_2]$

9''. » $a \,\varepsilon\, Q$ » $[1.3.4.5.6.7.8]$

10. $\omega \,\varepsilon\, (pi.VV').a \,\varepsilon\, N.A,\ aA \,\varepsilon\, V \,.\supset.\, \omega(aA) = \dfrac{1}{a}(\omega A)$ $[1.3.4.5.6.7.8_1]$

10'. » $.a \,\varepsilon\, R.$ » $[1.3.4.5.6.8_1.8_2]$

10''. » $.a \,\varepsilon\, Q.$ » $[1.3.4.5.6.7.8]$

11. $\omega \,\varepsilon\, (pd.VV').A,\ B,\ A + B \,\varepsilon\, V.\supset.\omega(A+B) = \omega A + \omega B$ $[1.3.4.5.6.7.8_1]$

[(α) Hp. P1 . §9P44 : ⊃ : $(A + B)/B = (\omega A + \omega B)/(\omega B)$
(β) » P1 : ⊃ : $(A + B)/B = (\omega(A+B))/(\omega B)$
» (α) . (β) . §9P2 . Tq : ⊃ : $(\omega(A+B))/(\omega B) = (\omega A + \omega B)/(\omega B)$.
§9P9 : ⊃ : Ts]

12. $\omega \varepsilon$ (pd. VV) . A, B, A—B ε V .⊃. $\omega(A-B) = \omega A - \omega B$ **[1.3.4.5.6.7.8_1]**

13. $\omega \varepsilon$ (p. VV') . = : $\omega \varepsilon$ (pd. VV') . ∪ . $\omega \varepsilon$ (pi. VV') (Def)

14. $n \varepsilon 2 + N$. $f \varepsilon (KG)|Z_n$. $A \varepsilon f1$: $r \varepsilon Z_{n-1}$. $\supset_r$. $\omega_r \varepsilon (p. frf(r+1))$: ⊃ .·.
$\omega_{n-1} \omega_{n-2} \dots \omega_2 \omega_1 A = \omega_{n-1} (\omega_{n-2} \dots \omega_2 \omega_1 A)$ (Def)

15. $n \varepsilon 2 + N$. $f \varepsilon (KG)|Z_{n-1}$. $r \varepsilon Z_{n-1}$. $\supset_r$. $\omega_r \varepsilon (p . frf(r+1))$: ⊃ .·. ω_{n-1}
$\omega_{n-2} \dots \omega_2 \omega_1 \varepsilon (fn/f1)$ sim

16. $\omega_1 \varepsilon (pd . V_1 V_2)$. $\omega_2 \varepsilon (pd . V_2 V_3)$. ⊃ . $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (pd . V_1 V_3)$ **[1.3.4.5.6.8]**
[(α) Hp. P15 : ⊃ : $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (V_3/V_1)$ sim
(β) » A, B ε V_1 . P1 . §9P2 . Tq : ⊃ : $A/B = (\omega_1 A)/(\omega_1 B) = (\omega_2(\omega_1 A))/$
$(\omega_2(\omega_1 B))$. P14 : ⊃ : $A/B = (\omega_2 \omega_1 A)/(\omega_2 \omega_1 B)$
» (α) . (β) . P1 : ⊃ : Ts]

17. $\omega_1 \varepsilon (pd . V_1 V_2)$. $\omega_2 \varepsilon (pi . V_2 V_3)$. ⊃ . $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (pi . V_1 V_3)$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

18. $\omega_1 \varepsilon (pi . V_1 V_2)$. » . ⊃ . $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (pd . V_1 V_3)$ [»]

19. » . $\omega_2 \varepsilon (pd . V_2 V_3)$. ⊃ . $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (pi . V_1 V_3)$ [»]

20. $\omega_1 \varepsilon (p . V_1 V_2)$. $\omega_2 \varepsilon (p . V_2 V_3)$. ⊃ : $\omega_2 \omega_1 \varepsilon (pd. V_1 V_3)$.=. $(\omega_1 \varepsilon (pd. V_1 V_2)$.
$\omega_2 \varepsilon (pd . V_2 V_3)) \cup (\omega_1 \varepsilon (pi . V_1 V_2) . \omega_2 \varepsilon (pi . V_2 V_3))$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

21. $\omega_1 \varepsilon (p . V_1 V_2)$. $\omega_2 \varepsilon (p . V_2 V_3)$. ⊃ : $\omega_1 \omega_2 \varepsilon (pi . V_1 V_3)$.=. $(\omega_1 \varepsilon (pd. V_1 V_2)$.
$\omega_2 \varepsilon (pi . V_2 V_3)) \cup (\omega_1 \varepsilon (pi . V_1 V_2) . \omega_2 \varepsilon (pd . V_2 V_3))$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

22. $n \varepsilon 2 + N$. $f \varepsilon (KG)|Z_n$: $r \varepsilon Z_{n-1}$. $\supset_r$. $\omega_r \varepsilon$ (p . fr(fr+1) : ⊃ .·. $\omega_{n-1} \dots$
$\omega_2 \omega_1 \varepsilon$ (pd.f1fn) .=. num $(\omega \frown (pi . ff)) \varepsilon (2N \cup \iota 0)$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

23. $n \varepsilon 2 + N$. $f \varepsilon (KG)|Z_n$: $r \varepsilon Z_{n-1}$.$\supset_r$. $\omega_r \varepsilon (p . frf(r+1))$.⊃.·.$\omega_{n-1} \dots$
$\omega_2 \omega_1 \varepsilon$ (pi . f1fn) . = . num $(\omega \frown (pi . ff)) \varepsilon 2N-1$ **[1.3.4.5.6.8_1]**

24. $\omega \varepsilon$ (V'/V) sim : X, Y ε V . $\supset_{X, Y}$. X+Y ε V . $\omega(X+Y) = \omega X + \omega Y$: ⊃ .·.
24_1. A, B ε V . ⊃ : A = B . = . $\omega A = \omega B$
24_2. A', B' ε V' . ⊃ : $\bar{\omega}(A' + B') = \bar{\omega} A' + \bar{\omega} B'$ **[1 . 1_1]**
[(α) Hp. A, B ε V : ⊃ : $\omega(A + B) = \omega A + \omega B$. P24_1 . I §5P23:
⊃ : $A + B = \bar{\omega}(\omega A + \omega B)$. I §5P23 . §2P3 : ⊃ : $\bar{\omega}(\omega A + \omega B)$
$= \bar{\omega}(\omega A) + \bar{\omega}(\omega B)$
(β) Hp. I §5P23 : ⊃ : A, B ε V . $\omega A = A'$. $\omega B = B'$. $- =_{A, B}$ Λ
» (α) . (β) . §2P3 . P24_1 : ⊃ : Ts]

24_3. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A > B . = . \omega A > \omega B$ [1 . 1_1]

[(α) Hp. $A > B : \supset : A \,\varepsilon\, B + G$. Hp. $: \supset : \omega A \,\varepsilon\, \omega B + G : \supset : \omega A > \omega B$

(β) » $\omega A > \omega B$. $P24_2$. I §5P23 $: \supset : A > B$

» (α) . (β) $: \supset :$ Ts]

24_4. $A \,\varepsilon\, V . m \,\varepsilon\, N . \supset . \omega(mA) = m(\omega A)$ [1 . 1_1]

[(α) Hp. §5P1 $: \supset : mA \,\varepsilon\, V$

(β) » $P24_1 : \supset : \omega(1A) = 1(\omega A) : \supset : 1 \,\varepsilon\, \overline{m \,\varepsilon}$ (Ts)

(γ) » $n \,\varepsilon\, \overline{m \,\varepsilon}$ (Ts) . Pp1 $: \supset : \omega(nA) + \omega A = n(\omega A) + \omega A$.

Hp. $P24_1 : \supset : \omega((n+1)A) = (n+1)(\omega A) : \supset : n+1 \,\varepsilon\, \overline{m \,\varepsilon}$ (Ts)

Hp. (α) . (β) . (γ) . Pi $: \supset :$ Ts]

24_5. $A \,\varepsilon\, V . a \,\varepsilon\, R . \supset . \omega(aA) = a(\omega A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

[(α) Hp. §6P11 $: \supset : aA \,\varepsilon\, V$

(β) » Tr $: \supset : n, na \,\varepsilon\, N . - =_n \Lambda$

(γ) » $n, na \,\varepsilon\, N$. $P24_4 : \supset : \omega((na)A) = (na)(\omega A)$. (α).$P24_4$

$: \supset : n(\omega(aA)) = (na)(\omega A)$. §5P8, 14 $: \supset : \omega(aA) = a(\omega A)$

Hp. (α) . (β) . (γ) $: \supset :$ Ts]

24_6. $A \,\varepsilon\, V . a \,\varepsilon\, KR . l'a \,\varepsilon\, Q . \supset . l'\omega((aA)) = \omega((l'a)A)$ [1.3.4.5.6.7.8]

[(α) Hp. §6P11 . §7P9 $: \supset : aA \supset V . (l'a)A \,\varepsilon\, V$

(β_1) » $X \,\varepsilon\, V' . X < l'(\omega(aA)) : \supset : a' \varepsilon\, a . X < \omega(a'A) . - =_{a'} \Lambda$

(β_2) » $X \,\varepsilon\, V' . a' \varepsilon\, a . X < \omega(a'A)$. Tq $: \supset : X < \omega((l'a)A)$

(β) » (α).(β_1).(β_2) $: \supset : X \,\varepsilon\, V' . X < l'(\omega(aA)) . \supset . X < \omega((l'a)A)$

(γ_1) » $X \,\varepsilon\, V' . X < \omega((l'a)A)$. $P24_2$, 24_3 $: \supset : \bar{\omega} X < (l'a)A : \supset :$

$a' \varepsilon\, a . \bar{\omega} X < a'A . - =_{a'} \Lambda$

(γ_2) » $X \,\varepsilon\, V' . a' \varepsilon\, a . \bar{\omega} X < a'A : \supset : X < \omega(a'A) : \supset : X < l'(\omega(aA))$

(γ) » (α).(γ_1).(γ_2) $: \supset : X \,\varepsilon\, V' . X < \omega((l'a)A) . \supset . X < l'(\omega(aA))$

» (β) . (γ) . §7Def2 $: \supset :$ Ts]

24_7. $A \,\varepsilon\, V . a \,\varepsilon\, KR . l'a \,\varepsilon\, Q . \supset . \omega((l'a)A) = (l'a)(\omega A)$ [1.3.4.5.6.7.8]

[Hp. $: \supset : \omega(aA) = a(\omega A) : \supset : l'(\omega(aA)) = l'(a(\omega A))$. $P24_6$ $: \supset :$ Ts]

24_8. $A \,\varepsilon\, V . m \,\varepsilon\, Q . \supset . \omega(mA) = m(\omega A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]

[Hp. §8P3 . $P24_7$ $: \supset :$ Ts]

24_9. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$ [»]

[Hp. §9P4 $: \supset : A = (A/B)B$. §9P2 . $P24_1$, 24_8 . §9P24 $: \supset :$ Ts]

24_{10}. $\omega \,\varepsilon\, (\mathrm{pd} . VV')$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]

[Hp. $P25_9$. P1 $: \supset :$ Ts]

26. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V) \text{ sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . \supset_{X,m} : mX \,\varepsilon\, V . V/X \,\varepsilon\, KR . \omega(mX) = m(\omega X) \therefore \supset ::$

26_1. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A = B . = . \omega A = \omega B$

26_2. $A' \varepsilon\, V' . m \,\varepsilon\, N . \supset . \overline{\omega}(mA') = m(\overline{\omega}A')$ $[1 . 1_1]$

26_3. $a \,\varepsilon\, R . A, aA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(aA) = a(\omega A)$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]$

26_4. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]$

[Hp. §9P23:$\supset$:A=(A/B)B.P26_3:$\supset$:Ts]

26_5. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A > B . = . \omega A > \omega B$ [»]

[(α) Hp. A>B.§9P21″:$\supset$: A/B>1.P26_4.Tr.§9P21″:$\supset$: ωA>ωB

(β) » $\omega A > \omega B . (\alpha) . P26_2 : \supset : A > B$

» $(\alpha) . (\beta) : \supset :$ Ts]

26_6. $\omega \,\varepsilon\, (\text{pd} . VV')$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]$

27. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V) \text{ sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . \supset_{X,m} : mX \,\varepsilon\, V . V/X \,\varepsilon\, KR . \omega(mX) = \frac{1}{m}(\omega X) \therefore \supset :: \omega \,\varepsilon\, (\text{pi} . VV')$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]$

28. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V) \text{ sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \varepsilon\, V . Y \,\varepsilon\, KV : \supset_{m,X,Y} : mX \,\varepsilon\, V . \omega(mX) = m(\omega X) . \overline{l}'(\omega Y) = \omega(l'Y) \therefore \supset ::$

28_1. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A = B . = . \omega A = \omega B$

28_2. $A' \varepsilon\, V . m \,\varepsilon\, N . \supset . \overline{\omega}(mA') = m(\overline{\omega}A')$ $[1 . 1_1]$

28_3. $a \,\varepsilon\, R . A, aA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(aA) = a(\omega A)$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]$

28_4. $A \,\varepsilon\, V . a \,\varepsilon\, KR . l'a \,\varepsilon\, Q . aV \supset V . \supset . \omega\big((l'a)A\big) = (l'a)(\omega A)$

[(α) Hp. $P28_3 : \supset : \omega(aA) = a(\omega A) : \supset : l'\big(\omega(aA)\big) = (l'a)(\omega A)$

(β) » $: \supset : l'\big(\omega(aA)\big) = \omega\big((l'a)A\big)$

» $(\alpha) . (\beta) : \supset :$ Ts]

28_5. $m \,\varepsilon\, Q . A, mA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(mA) = m(\omega A)$ $[1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]$

29_6. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$ »

28_7. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A > B . = . \omega A = \omega B$ »

28_8. $\omega \,\varepsilon\, (\text{pd} . VV')$ »

29. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V) \text{ sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . Y \,\varepsilon\, KV : \supset_{n,X,Y} : mX \,\varepsilon\, V . \omega(mX) = \frac{1}{m}(\omega X) . l'(\omega Y) = \omega(l'Y) \therefore \supset :: \omega \,\varepsilon\, (\text{pi} . VV')$ [1.3.4.5.6.7.8]

C. Burali-Forti.

V.

§ 1. — num.

$u , v \varepsilon \mathrm{K} . \supset :$

1. $\mathrm{num}\, u = 0 . = . u = \Lambda .$ Def.
2. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset :: \mathrm{num}\, u = m . = .\cdot. u -= \Lambda : x \varepsilon u . \supset_x . \mathrm{num}(u - \iota x) = m - 1 .$ Def.
3. $\mathrm{num}\, u = 1 . = .\therefore. u -= \Lambda : x , y \varepsilon u . \supset_{x,\, y} . x = y .$
4. $\mathrm{num}\, u = \infty . = . \mathrm{num}\, u -\varepsilon \mathrm{N}_0 .$ Def.
5. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} \cup \iota 0 \cup \iota \infty .$
6. $a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty . a < \infty .$ Def.
7. $u \cap v = \Lambda . \supset . \mathrm{num}\, (u \cup v) = \mathrm{num}\, u + \mathrm{num}\, v .$
8. $\mathrm{num}\, (u \cup v) + \mathrm{num}\, (u \cap v) = \mathrm{num}\, u + \mathrm{num}\, v .$
9. $k \varepsilon \mathrm{KK} . \supset . \cap ' k = \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k . \supset_y . x \varepsilon y) .$ Def.
10. » $. \supset . \cup ' k = \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon k . x \varepsilon y . -=_y \Lambda) .$ Def.
11. $u \varepsilon \mathrm{KK} . p , q \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{num}\, u = p : x \varepsilon u . \supset_x . \mathrm{num}\, x = q : x , y \varepsilon u . x -$
$= y . \supset_{x,\, y} . x \cap y = \Lambda .\therefore. \supset . \mathrm{num} \cup ' u = p \times q .$
12. $f \varepsilon (v \, \mathrm{f} \, u) . \supset . \mathrm{num}\, f u \leq \mathrm{num}\, u .$
13. » $\mathrm{num}\, f u = \infty . \supset . \mathrm{num}\, u = \infty .$
14. $f \varepsilon (v \, \mathrm{f} \, u) \mathrm{Sim} . \supset . \mathrm{num}\, f u = \mathrm{num}\, u .$
15. $f \varepsilon (v \, \mathrm{f} \, u) \mathrm{sim} . \supset . \mathrm{num}\, v = \mathrm{num}\, u .$

§ 2. — max, min.

$u, v \varepsilon \mathrm{Kq} . \supset :$

1. $x = \max u . = . x \varepsilon u . u \cap (x + \mathrm{Q}) = \Lambda .$ Def.
2. $x = \min u . = . x \varepsilon u . u \cap (x - \mathrm{Q}) = \Lambda .$ Def.
3. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \max u, \min u \varepsilon \mathrm{q} .$
4. $u \varepsilon \mathrm{KN} . u -= \Lambda . \supset . \min u \varepsilon \mathrm{N} .$
5. $u \varepsilon \mathrm{KN} : u -= \Lambda . m \varepsilon \mathrm{N} . u \cap (m + \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \max u \varepsilon \mathrm{N} .$
6. $u \varepsilon \mathrm{Kn} . u -= \Lambda . m \varepsilon \mathrm{n} . u \cap (m + \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \max u \varepsilon \mathrm{n} .$
7. » » » $. u \cap (m - \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \min u \varepsilon \mathrm{n} .$
8. $\min \mathrm{N} = 1 . \max \mathrm{N} = \Lambda .$
9. $\max \mathrm{Q} = \Lambda . \min \mathrm{Q} = \Lambda . \max \mathrm{q} = \Lambda . \min \mathrm{q} = \Lambda .$
10. $\max u, \max v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \max (u \cup v) = \max (\max u, \max v) .$
11. $\min u, \min v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \min (u \cup v) = \min (\min u, \min v) .$
12. $\max u, \max v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \max (u + v) = \max u + \max v .$

26. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V)\, \mathrm{sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . \supset_{X,m} : mX \,\varepsilon\, V . V/X \,\varepsilon\, KR . \omega(mX) = m(\omega X) \therefore \supset ::$

26_1. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A = B . = . \omega A = \omega B$

26_2. $A' \varepsilon\, V' . m \,\varepsilon\, N . \supset . \overline{\omega}(mA') = m(\overline{\omega}A')$ [1 . 1_1]

26_3. $a \,\varepsilon\, R . A, aA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(aA) = a(\omega A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

26_4. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]

[Hp. §9P23:$\supset$:$A=(A/B)B$.P26_3:$\supset$:Ts]

26_5. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A > B . = . \omega A > \omega B$ [»]

[(α) Hp. $A>B$.§9P21″:$\supset$: $A/B>1$.P26_4.Tr.§9P21″:$\supset$: $\omega A > \omega B$

(β) » $\omega A > \omega B . (\alpha) .$ P26_2 : $\supset$: $A > B$

» $(\alpha) . (\beta) : \supset :$ Ts]

26_6. $\omega \,\varepsilon\, (\mathrm{pd} . VV')$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]

27. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V)\, \mathrm{sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . \supset_{X,m} : mX \,\varepsilon\, V . V/X \,\varepsilon\, KR . \omega(mX) = \frac{1}{m}(\omega X) \therefore \supset :: \omega \,\varepsilon\, (\mathrm{pi} . VV')$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_1 . 8_2]

28. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V)\, \mathrm{sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \varepsilon\, V . Y \,\varepsilon\, KV : \supset_{m,X,Y} : mX \,\varepsilon\, V . \omega(mX) = m(\omega X) . \overline{1}'(\omega Y) = \omega(1'Y) \therefore \supset ::$

28_1. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A = B . = . \omega A = \omega B$

28_2. $A' \varepsilon\, V . m \,\varepsilon\, N . \supset . \overline{\omega}(mA') = m(\overline{\omega}A')$ [1 . 1_1]

28_3. $a \,\varepsilon\, R . A, aA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(aA) = a(\omega A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8_2]

28_4. $A \,\varepsilon\, V . a \,\varepsilon\, KR . 1'a \,\varepsilon\, Q . aV \supset V . \supset . \omega((1'a)A) = (1'a)(\omega A)$

[(α) Hp. P28_3 : $\supset$: $\omega(aA) = a(\omega A) : \supset : 1'(\omega(aA)) = (1'a)(\omega A)$

(β) » : $\supset : 1'(\omega(aA)) = \omega((1'a)A)$

» $(\alpha) . (\beta) : \supset :$ Ts]

28_5. $m \,\varepsilon\, Q . A, mA \,\varepsilon\, V . \supset . \omega(mA) = m(\omega A)$ [1 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8]

29_6. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset . A/B = (\omega A)/(\omega B)$ »

28_7. $A, B \,\varepsilon\, V . \supset : A > B . = . \omega A = \omega B$ »

28_8. $\omega \,\varepsilon\, (\mathrm{pd} . VV')$ »

29. $\omega \,\varepsilon\, (V'/V)\, \mathrm{sim} \therefore m \,\varepsilon\, N . X \,\varepsilon\, V . Y \,\varepsilon\, KV : \supset_{n,X,Y} : mX \,\varepsilon\, V . \omega(mX) = \frac{1}{m}(\omega X) . 1'(\omega Y) = \omega(1'Y) \therefore \supset :: \omega \,\varepsilon\, (\mathrm{pi} . VV')$ [1.3.4.5.6.7.8]

C. Burali-Forti.

V.

§ 1. — num.

$u, v \varepsilon \mathrm{K} . \supset :$

1. $\mathrm{num}\, u = 0 . = . u = \Lambda .$ Def.
2. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset :: \mathrm{num}\, u = m . = .\cdot. u -= \Lambda : x \varepsilon u . \supset_x . \mathrm{num}(u - \iota x) = m - 1 .$ Def.
3. $\mathrm{num}\, u = 1 . = .\cdot. u -= \Lambda : x, y \varepsilon u . \supset_{x,\, y} . x = y .$
4. $\mathrm{num}\, u = \infty . = . \mathrm{num}\, u - \varepsilon \mathrm{N}_0 .$ Def.
5. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} \cup \iota 0 \cup \iota \infty .$
6. $a \varepsilon \mathrm{N}_0 . \supset . a + \infty = \infty + a = \infty + \infty = \infty . a < \infty .$ Def.
7. $u \cap v = \Lambda . \supset . \mathrm{num}\,(u \cup v) = \mathrm{num}\, u + \mathrm{num}\, v .$
8. $\mathrm{num}\,(u \cup v) + \mathrm{num}\,(u \cap v) = \mathrm{num}\, u + \mathrm{num}\, v .$
9. $k \varepsilon \mathrm{KK} . \supset . \cap ' k = \overline{x \varepsilon}\,(y \varepsilon k . \supset_y . x \varepsilon y) .$ Def.
10. » $. \supset . \cup ' k = \overline{x \varepsilon}\,(y \varepsilon k . x \varepsilon y . -=_y \Lambda) .$ Def.
11. $u \varepsilon \mathrm{KK} . p, q \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{num}\, u = p : x \varepsilon u . \supset_x . \mathrm{num}\, x = q : x, y \varepsilon u . x -= y . \supset_{x,\, y} . x \cap y = \Lambda .\cdot. \supset . \mathrm{num} \cup ' u = p \times q .$
12. $f \varepsilon (v\, \mathrm{f}\, u) . \supset . \mathrm{num}\, f u \leqq \mathrm{num}\, u .$
13. » $\mathrm{num}\, f u = \infty . \supset . \mathrm{num}\, u = \infty .$
14. $f \varepsilon (v\, \mathrm{f}\, u)\, \mathrm{Sim} . \supset . \mathrm{num}\, f u = \mathrm{num}\, u .$
15. $f \varepsilon (v\, \mathrm{f}\, u)\, \mathrm{sim} . \supset . \mathrm{num}\, v = \mathrm{num}\, u .$

§ 2. — max, min.

$u, v \varepsilon \mathrm{Kq} . \supset :$

1. $x = \max u . = . x \varepsilon u . u \cap (x + \mathrm{Q}) = \Lambda .$ Def.
2. $x = \min u . = . x \varepsilon u . u \cap (x - \mathrm{Q}) = \Lambda .$ Def.
3. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \max u, \min u \varepsilon \mathrm{q} .$
4. $u \varepsilon \mathrm{KN} . u -= \Lambda . \supset . \min u \varepsilon \mathrm{N} .$
5. $u \varepsilon \mathrm{KN} . u -= \Lambda . m \varepsilon \mathrm{N} . u \cap (m + \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \max u \varepsilon \mathrm{N} .$
6. $u \varepsilon \mathrm{Kn} . u -= \Lambda . m \varepsilon \mathrm{n} . u \cap (m + \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \max u \varepsilon \mathrm{n} .$
7. » » » $. u \cap (m - \mathrm{N}) = \Lambda . \supset . \min u \varepsilon \mathrm{n} .$
8. $\min \mathrm{N} = 1 . \max \mathrm{N} = \Lambda .$
9. $\max \mathrm{Q} = \Lambda . \min \mathrm{Q} = \Lambda . \max \mathrm{q} = \Lambda . \min \mathrm{q} = \Lambda .$
10. $\max u, \max v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \max (u \cup v) = \max (\max u, \max v) .$
11. $\min u, \min v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \min (u \cup v) = \min (\min u, \min v) .$
12. $\max u, \max v \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \max (u + v) = \max u + \max v .$

13. $\min u,\ \min v \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \min(u+v) = \min u + \min v$.
14. $\max u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \min(-u) = -\max u$.
15. $\min u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \max(-u) = -\min u$.
16. $u,\ v \,\varepsilon\, \mathrm{KQ} \,.\, \max u,\ \max v \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \max(u \times v) = \max u \times \max v$.

§ 3. — l', l_1.

$u,\ v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, u -= \Lambda \,.\, v -= \Lambda \,.\, \supset :$

1. $x \varepsilon \mathrm{q} . \supset :: x = \mathrm{l}'u . = .\because u \frown (x+\mathrm{Q}) = \Lambda : y \,\varepsilon\, x - \mathrm{Q} . \supset_y . u \frown (y+\mathrm{Q}) -= \Lambda$. Def.

1'. $x \varepsilon \mathrm{q} . \supset :: x = \mathrm{l}_1 u . = .\because u \frown (x-\mathrm{Q}) = \Lambda : y \,\varepsilon\, x + \mathrm{Q} . \supset_y . u \frown (y-\mathrm{Q}) -= \Lambda$. Def.

2. $\max u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \max u = \mathrm{l}'u$.
2'. $\min u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \min u = \mathrm{l}_1 u$.
3. $\mathrm{l}'u \,\varepsilon\, u \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u = \max u$.
3'. $\mathrm{l}_1 u \,\varepsilon\, u \,.\, \supset .\, \mathrm{l}_1 u = \min u$.
4. $m \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, u \frown (m+\mathrm{Q}) = \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'u \leq m$.
4'. $m \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, u \frown (m-\mathrm{Q}) = \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{l}_1 u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}_1 u \geq m$.
5. $\mathrm{l}'u = \infty \,.\, = : m \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset_m .\, u \frown (m+\mathrm{Q}) -= \Lambda$. Def.
5'. $\mathrm{l}_1 u = -\infty \,.\, = : m \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset_m .\, u \frown (m-\mathrm{Q}) -= \Lambda$. Def.
6. $\mathrm{l}'u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\, \infty$.
6'. $\mathrm{l}_1 u \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\, (-\infty)$.
7. $a \varepsilon \mathrm{q} . \supset . a + \infty = \infty + a = \infty \,.\, a - \infty = (-\infty) + a = -\infty \,.\, \infty + \infty = \infty \,.$
$-\infty - \infty = -\infty \,.\, -\infty < a < +\infty \,.\, -\infty < +\infty$. Def.
8. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . a \times \infty = \infty \times a = \infty \,.\, a \times (-\infty) = (-\infty) \times a = -\infty \,.\, \infty \times \infty = \infty \,.$
$(-\infty) \times (-\infty) = \infty \,.\, \infty \times (-\infty) = (-\infty) \times \infty = -\infty \,.\, a/\infty = a/(-\infty)$
$= 0 \,.\, a/0 = \pm \infty$. Def.
9. $\mathrm{l}'(u \cup v) = \max(\mathrm{l}'u,\ \mathrm{l}'v)$.
9'. $\mathrm{l}_1(u \cup v) = \min(\mathrm{l}_1 u,\ \mathrm{l}_1 v)$.
10. $u \supset v \,.\, \supset .\, \mathrm{l}'u \leq \mathrm{l}'v \,.\, \mathrm{l}_1 u \geq \mathrm{l}_1 v$.

---

§ 3. 1-6. WEIERSTRASS. V. PINCHERLE, *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. Weierstrass.* Giornale di Battaglini, XVIII, p. 242.

BOLZANO (1817). V. STOLZ, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik,* I, p. 149.

DINI. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878, N. 15.

11. $u \supset v : x \varepsilon v . \supset_x . u \frown (x + \mathrm{Q}) -\!= \Lambda .\because. \supset . \mathrm{l}'u = \mathrm{l}'v$.
11'. $u \supset v : x \varepsilon v . \supset_x . u \frown (x - \mathrm{Q}) -\!= \Lambda .\because. \supset . \mathrm{l}_1 u = \mathrm{l}_1 v$.
12. $\mathrm{l}_1 u \leqq \mathrm{l}'u$.
13. $\mathrm{num}\, u > 1 . \supset . \mathrm{l}_1 u < \mathrm{l}'u$.
14. $\mathrm{l}'(u + v) = \mathrm{l}'u + \mathrm{l}'v . \mathrm{l}_1(u + v) = \mathrm{l}_1 u + \mathrm{l}_1 v$.
15. $m \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{l}'(mu) = m\mathrm{l}'u . \mathrm{l}_1(mu) = m\mathrm{l}_1 u$.
16. $\mathrm{l}'(-u) = -\mathrm{l}_1 u . \mathrm{l}_1(-u) = -\mathrm{l}'u$.
17. $u, v \varepsilon \mathrm{KQ} . \supset . \mathrm{l}'(u \times v) = \mathrm{l}'u \times \mathrm{l}'v$.
17'. $u, v \varepsilon \mathrm{KQ} . \supset . \mathrm{l}_1(u \times v) = \mathrm{l}_1 u \times \mathrm{l}_1 v$.
18. $u \varepsilon \mathrm{KQ} . \supset . \mathrm{l}'(/u) = /\mathrm{l}_1 u . \mathrm{l}_1(/u) = /\mathrm{l}'u$.
19. $\mathrm{l}'\mathrm{Q} = \infty . \mathrm{l}_1\mathrm{Q} = 0 . \mathrm{l}'\mathrm{q} = \infty . \mathrm{l}_1\mathrm{q} = -\infty$.
20. $u \varepsilon \mathrm{KQ} . \supset .\because. \mathrm{l}_1 u = 0 . = : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . u \frown (h - \mathrm{Q}) -\!= \Lambda$.
21. » . » $= : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . \mathrm{num}\,[u \frown (h - \mathrm{Q})] = \infty$
22. $u , v \varepsilon \mathrm{KQ} . \supset : \mathrm{l}_1 (u \cup v) = 0 . = . \mathrm{l}_1 u = 0 . \cup . \mathrm{l}_1 v = 0$.
23. $u , v \varepsilon \mathrm{Kq} . \supset : \mathrm{l}' (u \cup v) = \infty . = . \mathrm{l}' u = \infty . \cup . \mathrm{l}' v = \infty$.

§ 4. — q_n.

1. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset : \mathrm{q}_n = \mathrm{q\, f\, Z}_n$.
2. $x \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset . x = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)$.
3. $x, y \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset : x = y . = . x_1 = y_1 . x_2 = y_2 \ldots x_n = y_n$.
4. $x, y \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset . x + y = (x_1 + y_1 , \ldots x_n + y_n)$.
5. » » $x - y = (x_1 - y_1 , \ldots x_n - y_n)$. Def.
6. $a \varepsilon \mathrm{q} . x \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset . ax = (ax_1 , ax_2 , \ldots ax_n)$.
7. » » $. \supset . xa = ax$.
8. $0 = (0, 0, \ldots 0)$.
9. $\mathrm{mod}\, x = \mathrm{m}x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

$x, y, z \varepsilon \mathrm{q}_n . a, b \varepsilon \mathrm{q} . \supset :$
10. $x + y \varepsilon \mathrm{q}_n$.
11. $x + y = y + x$.
12. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.
13. $x - x = 0$.
14. $x + 0 = x$.
15. $ax \varepsilon \mathrm{q}_n$.

---

§ 4. 1-31. Grassmann, *Ausdehnungslehre.*

Cayley, *On a theorem relating to the multiple Thetafunctions.* Math. Ann. XVII, pag. 115.

13. $\min u,\ \min v \,\varepsilon\, q \,.\, \supset .\, \min (u + v) = \min u + \min v$.
14. $\max u \,\varepsilon\, q \,.\, \supset .\, \min (-u) = -\max u$.
15. $\min u \,\varepsilon\, q \,.\, \supset .\, \max (-u) = -\min u$.
16. $u,\ v \,\varepsilon\, KQ \,.\, \max u,\ \max v \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset .\, \max (u \times v) = \max u \times \max v$.

§ 3. — l′, l₁.

$u,\ v \,\varepsilon\, Kq \,.\, u -= \Lambda \,.\, v -= \Lambda \,.\, \supset :$

1. $x \varepsilon q . \supset :: x = l'u . = .\because u \cap (x + Q) = \Lambda : y \,\varepsilon\, x - Q . \supset_y . u \cap (y + Q) -= \Lambda$. Def.

1′. $x \,\varepsilon\, q . \supset :: x = l_1 u . = .\because u \cap (x - Q) = \Lambda : y \,\varepsilon\, x + Q . \supset_y . u \cap (y - Q) -= \Lambda$. Def.

2. $\max u \,\varepsilon\, q . \supset . \max u = l'u$.
2′. $\min u \,\varepsilon\, q . \supset . \min u = l_1 u$.
3. $l'u \,\varepsilon\, u . \supset . l'u = \max u$.
3′. $l_1 u \,\varepsilon\, u . \supset . l_1 u = \min u$.
4. $m \,\varepsilon\, q . u \cap (m + Q) = \Lambda . \supset . l'u \,\varepsilon\, q . l'u \leqq m$.
4′. $m \,\varepsilon\, q . u \cap (m - Q) = \Lambda . \supset . l_1 u \,\varepsilon\, q . l_1 u \geqq m$.
5. $l'u = \infty . = : m \,\varepsilon\, q . \supset_m . u \cap (m + Q) -= \Lambda$. Def.
5′. $l_1 u = -\infty . = : m \,\varepsilon\, q . \supset_m . u \cap (m - Q) -= \Lambda$. Def.
6. $l'u \,\varepsilon\, q \cup \iota \infty$.
6′. $l_1 u \,\varepsilon\, q \cup \iota (-\infty)$.
7. $a \varepsilon q . \supset . a + \infty = \infty + a = \infty . a - \infty = (-\infty) + a = -\infty . \infty + \infty = \infty . -\infty - \infty = -\infty . -\infty < a < +\infty . -\infty < +\infty$. Def.
8. $a \varepsilon Q . \supset . a \times \infty = \infty \times a = \infty . a \times (-\infty) = (-\infty) \times a = -\infty . \infty \times \infty = \infty . (-\infty) \times (-\infty) = \infty . \infty \times (-\infty) = (-\infty) \times \infty = -\infty . a/\infty = a/(-\infty) = 0 . a/0 = \pm \infty$. Def.
9. $l'(u \cup v) = \max (l'u,\ l'v)$.
9′. $l_1(u \cup v) = \min (l_1 u,\ l_1 v)$.
10. $u \supset v . \supset . l'u \leqq l'v . l_1 u \geqq l_1 v$.

---

§ 3. 1-6. Weierstrass. V. Pincherle, *Saggio di una introduzione alla teoria delle funzioni analitiche secondo i principii del prof. Weierstrass.* Giornale di Battaglini, XVIII, p. 242.

Bolzano (1817). V. Stolz, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik,* I, p. 149.

Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878, N. 15.

11. $u \supset v : x \,\varepsilon\, v \,.\, \supset_x .\, u \frown (x + Q) -= \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \supset .\, l'u = l'v$.
11'. $u \supset v : x \,\varepsilon\, v \,.\, \supset_x .\, u \frown (x - Q) -= \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \supset .\, l_1 u = l_1 v$.
12. $l_1 u \leqq l'u$.
13. $\text{num}\, u > 1 \,.\, \supset .\, l_1 u < l'u$.
14. $l'(u + v) = l'u + l'v \,.\, l_1(u + v) = l_1 u + l_1 v$.
15. $m \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset .\, l'(mu) = m l'u \,.\, l_1(mu) = m l_1 u$.
16. $l'(-u) = -l_1 u \,.\, l_1(-u) = -l'u$.
17. $u,\ v \,\varepsilon\, KQ \,.\, \supset .\, l'(u \times v) = l'u \times l'v$.
17'. $u,\ v \,\varepsilon\, KQ \,.\, \supset .\, l_1(u \times v) = l_1 u \times l_1 v$.
18. $u \,\varepsilon\, KQ \,.\, \supset .\, l'(/u) = /l_1 u \,.\, l_1(/u) = /l'u$.
19. $l'Q = \infty \,.\, l_1 Q = 0 \,.\, l'q = \infty \,.\, l_1 q = -\infty$.
20. $u \,\varepsilon\, KQ \,.\, \supset .\!\cdot\!.\, l_1 u = 0 \,.\, = : h \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset_h .\, u \frown (h - Q) -= \Lambda$.
21. » . » $= : h \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset_h .\, \text{num}\,[u \frown (h - Q)] = \infty$
22. $u\,,\ v \,\varepsilon\, KQ \,.\, \supset : l_1(u \smile v) = 0 \,.\, = .\, l_1 u = 0 \,.\smile .\, l_1 v = 0$.
23. $u\,,\ v \,\varepsilon\, Kq \,.\, \supset : l'(u \smile v) = \infty \,.\, = .\, l'u = \infty \,.\smile .\, l'v = \infty$.

§ 4. — q_n .

1. $n \,\varepsilon\, N \,.\, \supset : q_n = q \, f \, Z_n$.
2. $x \,\varepsilon\, q_n \,.\, \supset .\, x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$.
3. $x, y \,\varepsilon\, q_n \,.\, \supset : x = y \,.\, = .\, x_1 = y_1 \,.\, x_2 = y_2 \ldots x_n = y_n$.
4. $x, y \,\varepsilon\, q_n \,.\, \supset .\, x + y = (x_1 + y_1, \ldots x_n + y_n)$.
5. » » $x - y = (x_1 - y_1, \ldots x_n - y_n)$. Def.
6. $a \,\varepsilon\, q \,.\, x \,\varepsilon\, q_n \,.\, \supset .\, ax = (ax_1, ax_2, \ldots ax_n)$.
7. » » $.\, \supset .\, xa = ax$.
8. $0 = (0, 0, \ldots 0)$.
9. $\text{mod}\, x = \text{m}\, x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

$x, y, z \,\varepsilon\, q_n \,.\, a, b \,\varepsilon\, q \,.\, \supset :$
10. $x + y \,\varepsilon\, q_n$.
11. $x + y = y + x$.
12. $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.
13. $x - x = 0$.
14. $x + 0 = x$.
15. $ax \,\varepsilon\, q_n$.

---

§ 4. 1-31. Grassmann, *Ausdehnungslehre.*

Cayley, *On a theorem relating to the multiple Thetafunctions.* Math. Ann. XVII, pag. 115.

16. $a(x + y) = ax + ay$.
17. $(a + b)x = ax + bx$.
18. $a(bx) = (ab)x = abx$.
19. $1x = x$.
20. $\mathrm{m}\, x \,\varepsilon\, \mathrm{Q}_0$.
21. $\mathrm{mod}\,(x + y) \leqq \mathrm{mod}\, x + \mathrm{mod}\, y$.
22. $\mathrm{mod}\, ax = (\mathrm{mod}\, a)(\mathrm{mod}\, x)$.
23. $\mathrm{m}\, 0 = 0$.
24. $x \mid y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$. Def.
25. $x \mid y \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.
26. $x \mid x = (\mathrm{m}\, x)^2$.
27. $x \mid y = y \mid x$.
28. $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$.
29. $(ax) \mid y = x \mid (ay) = a(x \mid y)$.
30. $\mathrm{i}_1 = (1, 0, 0, \ldots 0) \,.\, \mathrm{i}_2 = (0, 1, 0, \ldots 0) \ldots \mathrm{i}_n = (0, 0 \ldots 0, 1)$. Def.
31. $x = x_1 \mathrm{i}_1 + x_2 \mathrm{i}_2 + \ldots + x_n \mathrm{i}_n$.

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\, \supset :$
41. $a \,\bar{}\, b = (a + \mathrm{Q}) \cap (b - \mathrm{Q})$.
42. $a^{\vdash\!\dashv} b = (a + \mathrm{Q}_0) \cap (b - \mathrm{Q}_0)$.
43. $a^{\vdash} b = (a + \mathrm{Q}_0) \cap (b - \mathrm{Q})$.
44. $a^{\dashv} b = (a + \mathrm{Q}) \cap (b - \mathrm{Q}_0)$.
45. $b \,\bar{}\, a = a \,\bar{}\, b \,.\, b^{\vdash\!\dashv} a = a^{\vdash\!\dashv} b \,.\, b^{\dashv} a = a^{\vdash} b \,.\, b^{\vdash} a = a^{\dashv} b$.
46. $\theta = 0^{\vdash\!\dashv} 1$.

(41–46: Def.)

§ 5. — *D*.

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq}_n \,.\, \supset :$

1. $Du = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \,\varepsilon}\, \{\mathrm{l}_1\, \mathrm{m}\, [(u - \iota\, x) - x] = 0\}$ Def.
2. $Du = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \,\varepsilon}\, [h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_h .\, \mathrm{num}\,(u \cap (x + \theta\, \overline{\mathrm{m}}\, h)) = \infty]$.
3. $D\mathrm{N} = \Lambda \,.\, D\mathrm{r} = \mathrm{q} \,.\, D\mathrm{q} = \mathrm{q}$.
4. $\mathrm{num}\, u = \infty \,.\, \mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, Du -= \Lambda$.
5. $\mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, Du = \Lambda$.

---

§ 5. 1, 2, 3. G. Cantor, Math. Ann., V, p. 123 (1871). Acta math., II, p. 343.

4-7. Dini, ib., N. 12, 13.

Cantor, Math. Ann., XV, pag. 1 (1879).

6. $DDu \supset Du$.

7. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^p u \supset Du$.

8. $D(u \cup v) = Du \cup Dv$.

9. $u \supset v \, . \supset . \, Du \supset Dv$.

10. $Du \supset u \, . \, Dv \supset v \, . \supset . \, D(u \cap v) \supset u \cap v$.

11. $Du \supset u \, . \, Dv \supset v \, . \supset . \, D(u \cup v) \supset u \cup v$.

12. $u \supset Du \, . \, v \supset Dv : \supset . \, u \cup v \supset D(u \cup v)$.

13. $u \supset Du \, . \supset . \, Du = D^2 u$.

14. $u \, \varepsilon \, \mathrm{Kq} \, . \, \mathrm{l}' u \, \varepsilon \, \mathrm{q} - u \, . \supset . \, \mathrm{l}' u = \max Du$.

14'. » $. \, \mathrm{l}_1 u$ » $\mathrm{l}_1 u = \min Du$.

15. $a \, \varepsilon \, \mathrm{q}_n \, . \supset . \, D(a + u) = a + Du$.

16. $(u + Dv) \cup (v + Du) \cup (Du + Dv) \supset D(u + v)$.

17. $D\left(\frac{1}{\mathrm{N}} + \frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} \cup \iota 0 \, . \, D\left(\frac{1}{\mathrm{N}} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} \cup -\frac{1}{\mathrm{N}} \cup \iota 0$.

18. $Du \, -\!\supset u \, . \supset . \, \mathrm{num} \, \mathrm{Kq}_n \cap \overline{w} \, \varepsilon \, (u = Dw) = \infty$.

21. $D^\omega u = \cap ' \, D^{\mathrm{N}} u$. Def.

22. $D^\omega u = \mathrm{q}_n \cap \overline{x} \, \varepsilon \, (p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset_p . \, x \, \varepsilon \, D^p u)$.

23. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{p+\omega} u = D^\omega D^p u$. Def.

24. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{p+\omega} u = D^\omega u$.

25. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{\omega+p} u = D^p D^\omega u$. Def.

26. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{p\omega} u = (D^\omega)^p u$. Def.

27. $D^{\omega^2} u = (D^\omega)^\omega u = \cap ' \, (D^\omega)^{\mathrm{N}} u$. Def.

28. $p \, \varepsilon \, \mathrm{N} + 1 \, . \supset . \, D^{\omega^p} u = \cap ' \, (D^{\omega^{p-1}})^{\mathrm{N}} u$. Def.

29. $a, p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{a\omega^p} u = (D^{\omega^p})^a u$. Def.

30. $p, a_0, a_1, \ldots a_p \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset . \, D^{a_0 \omega^p + a_1 \omega^{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega + a_p} u =$
$D^{a_p} D^{a_{p-1}\omega} \ldots D^{a_1 \omega^{p-1}} D^{a_0 \omega^p} u$. Def.

8, 18. G. CANTOR. Math. Ann., XXIII, pag. 470 (1884).

10, 11, 12. R. DE PAOLIS. *Teoria dei gruppi geometrici,* ecc. Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1890, pag. 27, 28.

13. J. BENDIXON, Acta mathematica, t. II, 1883, pag. 416.

14, 14'. DINI, ib., N. 16.

21-30. CANTOR, Math. Ann., XVII (1880).

16. $a(x+y) = ax + ay$.
17. $(a+b)x = ax + bx$.
18. $a(bx) = (ab)x = abx$.
19. $1x = x$.
20. $\mathrm{m}\,x \,\varepsilon\, Q_0$.
21. $\mathrm{mod}\,(x+y) \leqq \mathrm{mod}\,x + \mathrm{mod}\,y$.
22. $\mathrm{mod}\,ax = (\mathrm{mod}\,a)\,(\mathrm{mod}\,x)$.
23. $\mathrm{m}\,0 = 0$.
24. $x \mid y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$. Def.
25. $x \mid y \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.
26. $x \mid x = (\mathrm{m}\,x)^2$.
27. $x \mid y = y \mid x$.
28. $x \mid (y+z) = x \mid y + x \mid z$.
29. $(ax) \mid y = x \mid (ay) = a(x \mid y)$.
30. $\mathrm{i}_1 = (1, 0, 0, \ldots 0) \,.\, \mathrm{i}_2 = (0, 1, 0, \ldots 0) \ldots \mathrm{i}_n = (0, 0 \ldots 0, 1)$. Def.
31. $x = x_1 \mathrm{i}_1 + x_2 \mathrm{i}_2 + \ldots + x_n \mathrm{i}_n$.

$a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, a < b \,.\, \supset :$
41. $a^{-}b = (a + Q) \frown (b - Q)$.
42. $a^{\vdash\!\dashv}b = (a + Q_0) \frown (b - Q_0)$.
43. $a^{\vdash}b = (a + Q_0) \frown (b - Q)$. Def.
44. $a^{\dashv}b = (a + Q) \frown (b - Q_0)$.
45. $b^{-}a = a^{-}b \,.\, b^{\vdash\!\dashv}a = a^{\vdash\!\dashv}b \,.\, b^{\dashv}a = a^{\vdash}b \,.\, b^{\vdash}a = a^{\dashv}b$.
46. $\theta = 0^{\vdash\!\dashv}1$.

§ 5. — *D*.

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq}_n \,.\, \supset :$

1. $Du = \mathrm{q}_n \frown \overline{x\,\varepsilon}\,\{\mathrm{l}_1\, \mathrm{m}\,[(u - \iota x) - x] = 0\}$ Def.
2. $Du = \mathrm{q}_n \frown \overline{x\,\varepsilon}\,[h \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset_h .\, \mathrm{num}\,(u \frown (x + \theta\, \overline{\mathrm{m}}\, h)) = \infty]$.
3. $D\mathrm{N} = \Lambda \,.\, D\mathrm{r} = \mathrm{q} \,.\, D\mathrm{q} = \mathrm{q}$.
4. $\mathrm{num}\,u = \infty \,.\, \mathrm{l'}\,\mathrm{mod}\,u \,\varepsilon\, Q \,.\, \supset .\, Du -= \Lambda$.
5. $\mathrm{num}\,u \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, Du = \Lambda$.

---

§ 5. 1, 2, 3. G. Cantor, Math. Ann., V, p. 123 (1871). Acta math., II, p. 343.
4-7. Dini, ib., N. 12, 13.
Cantor, Math. Ann., XV, pag. 1 (1879).

6. $DDu \supset Du$.
7. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^p u \supset Du$.
8. $D(u \cup v) = Du \cup Dv$.
9. $u \supset v . \supset . Du \supset Dv$.
10. $Du \supset u . Dv \supset v . \supset . D(u \cap v) \supset u \cap v$.
11. $Du \supset u . Dv \supset v . \supset . D(u \cup v) \supset u \cup v$.
12. $u \supset Du . v \supset Dv : \supset . u \cup v \supset D(u \cup v)$.
13. $u \supset Du . \supset . Du = D^2 u$.
14. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} . \mathrm{l}' u \,\varepsilon\, \mathrm{q} - u . \supset . \mathrm{l}' u = \max Du$.
14'. » $. \mathrm{l}_1 u$ » $\mathrm{l}_1 u = \min Du$.
15. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q}_n . \supset . D(a + u) = a + Du$.
16. $(u + Dv) \cup (v + Du) \cup (Du + Dv) \supset D(u + v)$.
17. $D\left(\frac{1}{\mathrm{N}} + \frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} \cup \iota 0 . D\left(\frac{1}{\mathrm{N}} - \frac{1}{\mathrm{N}}\right) = \frac{1}{\mathrm{N}} \cup -\frac{1}{\mathrm{N}} \cup \iota 0$.
18. $Du \supset u . \supset . \mathrm{num}\, \mathrm{Kq}_n \cap \overline{w \,\varepsilon}\, (u = Dw) = \infty$.

21. $D^\omega u = \cap ' D^{\mathrm{N}} u$. Def
22. $D^\omega u = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \,\varepsilon}\, (p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset_p . x \,\varepsilon\, D^p u)$.
23. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{p+\omega} u = D^\omega D^p u$. Def.
24. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{p+\omega} u = D^\omega u$.
25. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{\omega+p} u = D^p D^\omega u$. Def.
26. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{p\omega} u = (D^\omega)^p u$. Def.
27. $D^{\omega^2} u = (D^\omega)^\omega u = \cap ' (D^\omega)^{\mathrm{N}} u$. Def.
28. $p \,\varepsilon\, \mathrm{N} + 1 . \supset . D^{\omega^p} u = \cap ' (D^{\omega^{p-1}})^{\mathrm{N}} u$. Def.
29. $a, p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{a\omega^p} u = (D^{\omega^p})^a u$. Def.
30. $p, a_0, a_1, \ldots a_p \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . D^{a_0 \omega^p + a_1 \omega^{p-1} + \ldots + a_{p-1}\omega + a_p} u =$
$D^{a_p} D^{a_{p-1}\omega} \ldots D^{a_1 \omega^{p-1}} D^{a_0 \omega^p} u$. Def.

8, 18. G. Cantor. Math. Ann., XXIII, pag. 470 (1884).

10, 11, 12. R. De Paolis. *Teoria dei gruppi geometrici,* ecc. Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1890, pag. 27, 28.

13. J. Bendixon, Acta mathematica, t. II, 1883, pag. 416.

14, 14'. Dini, ib., N. 16.

21-30. Cantor, Math. Ann., XVII (1880).

$u \, \varepsilon \, \mathrm{Kq} \, . \supset :$

41. $D'u = \mathrm{q} \cap \overline{x \, \varepsilon} \, [x = \mathrm{l}'(u \cap (x - \mathrm{Q}))]$. Def.

42. $D_1 u = \mathrm{q} \cap \overline{x \, \varepsilon} \, [x = \mathrm{l}_1(u \cap (x + \mathrm{Q}))]$. Def.

43. $Du = D'u \cup D_1 u$.

44. $D'(-u) = -D_1 u \, . \, D_1(-u) = -D'u$.

45. $D'(u \cup v) = D'u \cup D'v \, . \, D_1(u \cup v) = D_1 u \cup D_1 v$.

46. $DD'u \supset Du \, . \, DD_1 u \supset Du \, . \, D'Du \supset D'u \, . \, D_1 Du \supset D_1 u \, . \, D'D'u \supset D'u \, .$
$D'D_1 u \supset D'u \, . \, D_1 D'u \supset D_1 u \, . \, D_1 D_1 u \supset D_1 u$.

§ 6. — *I, E, L.*

$n \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \, u, v \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, \mathrm{q}_n \, . \supset :$

1. $Iu = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \, \varepsilon} \, (h \, \varepsilon \, \mathrm{Q} \, . \, x + \theta \, \overline{\mathrm{m}} \, h \supset u \, . - =_h \Lambda)$. Def.
2. $Eu = I(-u)$. Def.
3. $Lu = (-Iu)(-Eu)$. Def.
4. $E(-u) = Iu \, . \, L(-u) = Lu$.
5. $Iu \cap Eu = \Lambda \, . \, Iu \cap Lu = \Lambda \, . \, Eu \cup Lu = \Lambda \, . \, Iu \cup Eu \cup Lu = \mathrm{q}_n$.
6. $Iu \supset u \, . \, Eu \supset -u \, . \, u \supset Iu \cup Lu \, . \, -u \supset Eu \cup Lu$.
7. $IIu = Iu \, . \, I\,Eu = Eu \, . \, Lu = ILu \cup LLu \, . \, LLu = LIu \cup LEu$.
8. $I(u \cap Lu) = \Lambda . ELu = Iu \cup Eu . EIu = -(Iu \cup LIu) . EEu = -(Eu \cup LEu)$.
9. $ILIu = \Lambda \, . \, ILEu = \Lambda \, . \, ILLu = \Lambda \, . \, LLLu = LLu \, . \, LLIu = LIu \, .$
$LLEu = LEu \, . \, LILu \supset LLu$.

11. $u \supset v \, . \supset . \, Iu \supset Iv \, . \, Ev \supset Eu \, . \, Lu \supset Iv \cup Lv$.
12. $I(u \cap v) = Iu \cap Iv \, . \, E(u \cup v) = Eu \cap Ev$.
13. $Iu \cup Iv \supset I(u \cup v) \supset Iu \cup Iv \cup (Lu)(Lv)$.
14. $Eu \cup Ev \supset E(u \cap v) \supset Eu \cup Ev \cup (Lu)(Lv)$.
15. $(Iu)(Lv) \cup (Iv)(Lu) \supset L(u \cap v) \supset (Iu)(Lv) \cup (Iv)(Lu) \cup (Lu)(Lv)$.
16. $(Eu)(Lv) \cup (Ev)(Lu) \supset L(u \cup v) \supset (Eu)(Lv) \cup (Ev)(Lu) \cup (Lu)(Lv)$.
17. $I(Iu \cup Iv) = Iu \cup Iv$.
18. $I(LLu \cup LLv) = \Lambda$.
19. $u - = \Lambda \, . \, -u - = \Lambda \, . \supset . \, Lu - = \Lambda$.
20. $Iu = u - D(-u)$.

---

§ 5. 44-46. Burali-Forti. *Sulle classi derivate a destra e a sinistra.* Atti Acc. Torino, 1894.

§ 6. 1-18. Peano, *Arithmetices principia,* 1889, § 12.

19-20. Jordan, *Cours d'Analyse,* 1893, vol. I, pag. 20.

§ 7. — C, med.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, u, v \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q}_n \,.\, \supset :$

1. $Cu = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \varepsilon} [\mathrm{l}_1 \, \mathrm{m}\, (u - x) = 0]$. Def.
2. $Cu = u \cup Du = u \cup Lu = Iu \cup Lu = - Eu$.
3. $CCu = Cu$.
4. $C(u \cup v) = Cu \cup Cv$.
5. $u \supset v \,.\, \supset .\, Cu \supset Cv$.
6. $C(u \cap v) \supset Cu \cap Cv$.
7. $Cu = u \,.\, Cv = v \,.\, \supset .\, C(u \cap v) = Cu \cap Cv$.
8. $u \varepsilon \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}' u, \mathrm{l}_1 u \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{l}' u, \mathrm{l}_1 u \varepsilon Cu$.
9. $x \varepsilon Du \,. = .\, x \varepsilon C(u - \iota x)$.
10. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, u = Cu$.

21. $u \varepsilon \mathrm{K}\,\mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{med}\, u = (\mathrm{l}_1 u)^{-} (\mathrm{l}' u)$. Def.
22. » $.\, \supset .\, \mathrm{med}\, u = \mathrm{q} \cap \overline{x \varepsilon} (y, z \varepsilon u \,.\, y < x < z \,.\, - =_{y,z} \Lambda)$.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, u, v \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q}_n \,.\, \supset :$

23. $\mathrm{med}\, u = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \varepsilon} (a \varepsilon \mathrm{q}_n \,.\, \supset_a .\, a \mid x \varepsilon \mathrm{med}\, (a \mid u))$. Def.
24. $x, y \varepsilon u \,.\, x - = y \,.\, p, q \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, (p x + q y)/(p + q) \varepsilon \mathrm{med}\, u$.
25. $u \supset v \,.\, \supset .\, \mathrm{med}\, u \supset \mathrm{med}\, v$.
26. $\mathrm{med}\, u = u \,.\, \mathrm{med}\, v = v \,.\, \supset .\, \mathrm{med}\, (u \cap v) = (\mathrm{med}\, u) \cap (\mathrm{med}\, v)$.
27. $\mathrm{med}\, \mathrm{med}\, u = \mathrm{med}\, u$.
28. $I\, \mathrm{med}\, u = \mathrm{med}\, u$.

G. PEANO.

---

§ 7, 1-9. PEANO, *Math. Ann.* XXXVII, pag. 195.

$u \varepsilon \mathrm{Kq} \,.\, \supset :$

41. $D'u = \mathrm{q} \cap \overline{x \varepsilon} \left[x = \mathrm{l}'(u \cap (x - \mathrm{Q}))\right]$. Def.

42. $D_1 u = \mathrm{q} \cap \overline{x \varepsilon} \left[x = \mathrm{l}_1(u \cap (x + \mathrm{Q}))\right]$. Def.

43. $Du = D'u \cup D_1 u$.

44. $D'(-u) = -D_1 u \,.\, D_1(-u) = -D'u$.

45. $D'(u \cup v) = D'u \cup D'v \,.\, D_1(u \cup v) = D_1 u \cup D_1 v$.

46. $DD'u \supset Du \,.\, DD_1 u \supset Du \,.\, D'Du \supset D'u \,.\, D_1 Du \supset D_1 u \,.\, D'D'u \supset D'u \,.$
$D'D_1 u \supset D'u \,.\, D_1 D'u \supset D_1 u \,.\, D_1 D_1 u \supset D_1 u$.

§ 6. — *I, E, L.*

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, u, v \varepsilon \mathrm{K}\mathrm{q}_n \,.\, \supset :$

1. $Iu = \mathrm{q}_n \cap \overline{x \varepsilon} (h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, x + \theta \,\overline{\mathrm{m}}\, h \supset u \,.\, - =_h \Lambda)$. Def.
2. $Eu = I(-u)$. Def.
3. $Lu = (-Iu)(-Eu)$. Def.
4. $E(-u) = Iu \,.\, L(-u) = Lu$.
5. $Iu \cap Eu = \Lambda \,.\, Iu \cap Lu = \Lambda \,.\, Eu \cup Lu = \Lambda \,.\, Iu \cup Eu \cup Lu = \mathrm{q}_n$.
6. $Iu \supset u \,.\, Eu \supset -u \,.\, u \supset Iu \cup Lu \,.\, -u \supset Eu \cup Lu$.
7. $IIu = Iu \,.\, IEu = Eu \,.\, Lu = ILu \cup LLu \,.\, LLu = LIu \cup LEu$.
8. $I(u \cap Lu) = \Lambda . ELu = Iu \cup Eu . EIu = -(Iu \cup LIu) . EEu = -(Eu \cup LEu)$.
9. $ILIu = \Lambda \,.\, ILEu = \Lambda \,.\, ILLu = \Lambda \,.\, LLLu = LLu \,.\, LLIu = LIu \,.$
$LLEu = LEu \,.\, LILu \supset LLu$.

11. $u \supset v \,.\, \supset .\, Iu \supset Iv \,.\, Ev \supset Eu \,.\, Lu \supset Iv \cup Lv$.
12. $I(u \cap v) = Iu \cap Iv \,.\, E(u \cup v) = Eu \cap Ev$.
13. $Iu \cup Iv \supset I(u \cup v) \supset Iu \cup Iv \cup (Lu)(Lv)$.
14. $Eu \cup Ev \supset E(u \cap v) \supset Eu \cup Ev \cup (Lu)(Lv)$.
15. $(Iu)(Lv) \cup (Iv)(Lu) \supset L(u \cap v) \supset (Iu)(Lv) \cup (Iv)(Lu) \cup (Lu)(Lv)$.
16. $(Eu)(Lv) \cup (Ev)(Lu) \supset L(u \cup v) \supset (Eu)(Lv) \cup (Ev)(Lu) \cup (Lu)(Lv)$.
17. $I(Iu \cup Iv) = Iu \cup Iv$.
18. $I(LLu \cup LLv) = \Lambda$.
19. $u - = \Lambda \,.\, -u - = \Lambda \,.\, \supset .\, Lu - = \Lambda$.
20. $Iu = u - D(-u)$.

---

§ 5. 44-46. BURALI-FORTI. *Sulle classi derivate a destra e a sinistra.* Atti Acc. Torino, 1894.

§ 6. 1-18. PEANO, *Arithmetices principia,* 1889, § 12.

19-20. JORDAN, *Cours d'Analyse,* 1893, vol. I, pag. 20.

§ 7. — C, med.

$n \varepsilon \mathrm{N} . u , v \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q}_n . \supset :$

1. $Cu = \mathrm{q}_n \frown \overline{x \varepsilon} [\mathrm{l}_1 \mathrm{m} (u - x) = 0]$. Def.
2. $Cu = u \smile Du = u \smile Lu = Iu \smile Lu = - Eu$.
3. $CCu = Cu$.
4. $C(u \smile v) = Cu \smile Cv$.
5. $u \supset v . \supset . Cu \supset Cv$.
6. $C(u \frown v) \supset Cu \frown Cv$.
7. $Cu = u . Cv = v . \supset . C(u \frown v) = Cu \frown Cv$.
8. $u \varepsilon \mathrm{Kq} . \mathrm{l}' u, \mathrm{l}_1 u \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \mathrm{l}' u, \mathrm{l}_1 u \varepsilon Cu$.
9. $x \varepsilon Du . = . x \varepsilon C (u - \iota x)$.
10. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} . \supset . u = Cu$.

21. $u \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q} . \supset . \mathrm{med}\, u = (\mathrm{l}_1 u) \bar{-} (\mathrm{l}' u)$. Def.
22. » $. \supset . \mathrm{med}\, u = \mathrm{q} \frown \overline{x \varepsilon} (y , z \varepsilon u . y < x < z . - =_{y, z} \Lambda)$.

$n \varepsilon \mathrm{N} . u , v \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q}_n . \supset :$

23. $\mathrm{med}\, u = \mathrm{q}_n \frown \overline{x \varepsilon} (a \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset_a . a \mid x \varepsilon \mathrm{med} (a \mid u))$. Def.
24. $x , y \varepsilon u . x - = y . p , q \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . (p x + q y)|(p + q) \varepsilon \mathrm{med}\, u$.
25. $u \supset v . \supset . \mathrm{med}\, u \supset \mathrm{med}\, v$.
26. $\mathrm{med}\, u = u . \mathrm{med}\, v = v . \supset . \mathrm{med} (u \frown v) = (\mathrm{med}\, u) \frown (\mathrm{med}\, v)$.
27. $\mathrm{med}\, \mathrm{med}\, u = \mathrm{med}\, u$.
28. $I\, \mathrm{med}\, u = \mathrm{med}\, u$.

G. Peano.

§ 7, 1-9. Peano, *Math. Ann.* XXXVII, pag. 195.

VI.

§ 1.

$u, v, w \varepsilon \mathrm{K} . \supset :$

1. $u \backsim v . = : f \varepsilon (vfu) \mathrm{sim} . -=_f \Lambda .$ Def.
2. $u \backsim u .$
3. $u \backsim v . = . v \backsim u .$
4. $u \backsim v . v \backsim w . \supset . u \backsim w .$
5. $\mathrm{num}\, u \varepsilon \mathrm{N} . \supset : u \backsim v . = . \mathrm{num}\, u = \mathrm{num}\, v .$
6. $\mathrm{num}\, u = \infty . \supset .\because v \supset u . v -= u . v \backsim u : -=_v \Lambda .$
7. $\mathrm{n} \backsim \mathrm{N} . \mathrm{R} \backsim \mathrm{N} . \mathrm{r} \backsim \mathrm{N} .$
8. $\mathrm{Nalg} = \mathrm{q}' \frown \overline{x \varepsilon} (p \varepsilon \mathrm{N} . a_0, a_1, \ldots, a_p \varepsilon \mathrm{n} . a_0 -= 0 . a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p = 0 . -=_{p, a_0, a_1, \ldots a_p} \Lambda) .$ Def.
9. $\mathrm{Nalg} \backsim \mathrm{N} .$
10. $u \backsim \mathrm{N} . v \supset u . \mathrm{num}\, v = \infty . \supset . u \backsim v .$
11. $u \backsim v \backsim \mathrm{N} . \supset . (u \cup v) \backsim \mathrm{N} .$
12. $u \varepsilon \mathrm{Kq} . u \backsim \mathrm{N} . a, b \varepsilon \mathrm{q} . a < b . \supset . (a \overline{\ } b) \frown (-u) -= \Lambda .$

$n \varepsilon \mathrm{N} . u, v, \ldots \varepsilon \mathrm{Kq}_n . \supset :$

13. $Du \supset u . \supset . u \backsim \mathrm{N} . \cup . u \backsim \theta .$
14. $Du = u . \supset . u \backsim \theta .$
15. $u \frown Du = \Lambda . \supset . u \backsim \mathrm{N} .$
16. $Du \backsim \mathrm{N} . \supset . u \backsim \mathrm{N} .$

---

§ 1.

1. Cantor, III, tr. fr., p. 311.
2. Dedekind, LIII, n. 32.
4. » LIII, n. 33.
6. Cantor, III, tr. fr., p. 311.
7. » III, tr. fr., p. 319.
8. » II, tr. fr., p. 305.
9. » II, tr. fr., p. 306.
10. » III, tr. fr., p. 313.
11. Cantor, III, tr. fr. p. 313.
12. » II, tr. fr., p. 308.
13. » XXIII, p. 488; » XXV, p. 388.
14. » XXIII, p. 485; » XXV, p. 381; Bendixson, XXX.
15. Cantor, XII, tr. fr., p. 373.
16. » XII, tr. fr., p. 373.

17. $u \varepsilon \mathrm{Kq}_n : h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_h . u \cap \overline{\mathrm{mod}}\, \theta h \varepsilon \overline{\mathrm{num}}\, \mathrm{N} \cup \infty \mathrm{N} .\because. \supset . u \varepsilon \overline{\mathrm{num}}\, \mathrm{N} \cup \infty \mathrm{N}.$
18. $\theta - \mathrm{R} \infty \theta .$
19. $m, n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{q}_m \infty \mathrm{q}_n \infty \theta .$
20. » $. m -= n . \supset . (\mathrm{q}_n \mathrm{f} \mathrm{q}_n)\, \mathrm{sim\ cont} = \Lambda .$
21. $m \varepsilon 1 + \mathrm{N} . \supset .\because. f \varepsilon (\mathrm{q}_m \mathrm{fq})\, \mathrm{cont} . f\mathrm{q} = \mathrm{q}_n : -=_f \Lambda .$
22. $u \varepsilon \mathrm{Connex} . = :: a, b \varepsilon u . h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_{a,b,h} .\because. p \varepsilon \mathrm{N} . x \varepsilon u\mathrm{f}\mathrm{Z}_p . x_1 = a . x_p =$
$= b : r \varepsilon \mathrm{Z}_{p-1} . \supset_r . \mathrm{mod}\,(x_{r+1} - x_r) < h : -=_{p,x} \Lambda .$ Def.
23. $u \varepsilon \mathrm{Connex} . \supset . u \supset Du .$
24. $u \varepsilon \mathrm{Contin} . = : Du \supset u . u \varepsilon \mathrm{Connex} .$ Def.
25. $u, v, w, z, \ldots \varepsilon \mathrm{Connex} : u \cap v -= \Lambda . u \cap w -= \Lambda . u \cap z -= \Lambda \ldots : \supset .$
$(u \cup v \cup w \cup z \cup \ldots) \varepsilon \mathrm{Connex} .$
26. $u, v, w, \ldots, k \varepsilon \mathrm{Contin} : u \cap v -= \Lambda . u \cap w -= \Lambda \ldots u \cap k -= \Lambda .\because. \supset :$
$(u \cup v \cup w \cup \ldots \cup k) \varepsilon \mathrm{Contin} .$
27. $u \varepsilon \mathrm{Contin} . v \supset u . v \infty \mathrm{N} . \supset . u - v \varepsilon \mathrm{Connex} .$
28. $u \varepsilon \mathrm{Kq} . Du \infty \mathrm{N} . h \varepsilon \mathrm{Q} . \supset : p \varepsilon \mathrm{N} . a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p \varepsilon \mathrm{q} . u \supset a_1 \vdash b_1 \cup$
$a_2 \vdash b_2 \cup \ldots \cup a_p \vdash b_p . \mathrm{mod}\,(b_1 - a_1) + \mathrm{mod}\,(b_2 - a_2) + \ldots + \mathrm{mod}\,(b_p - a_p)$
$< h . -=_{p, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p} \Lambda .$
29. $Du = u . (\mathrm{K}u)\, \mathrm{Contin} = \Lambda : \supset : u = Dw . u \cap w = \Lambda . -=_w \Lambda .$
30. $u, v \varepsilon \mathrm{Kq} . u = Du : a, b \varepsilon \mathrm{q} . a \vdash b \supset Du . =_{a,b} \Lambda : v \infty \mathrm{N} .\because. \supset :$
$c \varepsilon \mathrm{q} . (u - c) \cap v = \Lambda . -=_c \Lambda .$

§ 2.

1. $u, v \varepsilon \mathrm{K} . \supset : \mathrm{Nc}' u = \mathrm{Nc}' v . = . u \infty v .$ Def.
2. $\mathrm{Nc} = \bar{x} \varepsilon (u \varepsilon \mathrm{K} . x = \mathrm{Nc}' u : -=_u \Lambda) .$ Def.

---

17. Cantor, XXIII, p. 457.
18. » III, tr. fr., p. 316.
19. » III, tr. fr., p. 315.
20. Thomae, V; Luroth, VI; Cantor, VII; Netto, IX; Milesi, LXV.
21. Peano, LIX; Hilbert, LXI.
22. Cantor, XVIII, p. 31.
23. De Paolis, LVIII, p. 29.
24. Cantor, XVIII, p. 31.
25. De Paolis, LVIII, p. 28.
26. De Paolis, LVIII, p. 29
27. Cantor, XI, tr. fr., p. 366.
28. » XII, tr. fr., p. 376.
29. Bendixson, XX, p. 427.
30. Scheeffer, XXIX. p. 291.

§ 2.

1. Cantor, XLIX, p. 56.
2. » » p. 56.

3. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K} \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, \supset \,.\, \mathrm{Nc}`u + \mathrm{Nc}`v = \mathrm{Nc}`(u \smile v)$. Def.
4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{K}\,(\mathrm{K} \frown \overline{\mathrm{Nc}`a}) \,.\, \mathrm{Nc}`u = b : x, y \,\varepsilon\, u \,.\, x -= y \,.\supset_{x,\,y} .\, x \frown y = \Lambda \,.\!\cdot\!.\, \supset \,.\, ab = \mathrm{Nc}`(\smile`u)$. Def.
5. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} \,.\supset.\, a + b = b + a \,.\, a + (b + c) = (a + b) + c \,.\, ab = ba \,.\, a(bc) = (ab)c \,.\, a(b + c) = ab + ac$.
6. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} \,.\supset.\, a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c \,.\, abc = a(bc) = (ab)c$. Def.
7. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} \,.=\!.\!\cdot\!.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{K} : x, y \,\varepsilon\, u \,.\supset.\, x = y \smile x \,\mathrm{S}_u\, y \smile y \,\mathrm{S}_u\, x : x, y \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\mathrm{S}_u\, y \,.\, y \,\mathrm{S}_u\, x \,.=_{x,\,y} \Lambda : x, y, z \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\mathrm{S}_u\, y \,.\, y \,\mathrm{S}_u\, z \,.\supset_{x,y,z} .\, x \,\mathrm{S}_u\, z$. Def.
8. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} \,.\supset :: f \,\varepsilon\, (v \text{ ford } u) \,.=\!.\!\cdot\!.\, f \,\varepsilon\, (v\, \mathrm{f}\, u) \text{ sim} : x, y \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\mathrm{S}_u\, y \,.\supset.\, fx \,\mathrm{S}_v\, fy$. Def.
9. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K \, bord} \,.=\!:\!\cdot\!:\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} \,.\, \overline{x\,\varepsilon}\, (x \,\varepsilon\, u : y \,\varepsilon\, u \,.\, y \,\mathrm{S}_u\, x \,.=_y \Lambda) -= \Lambda :: x \,\varepsilon\, u .\supset_x .\!\cdot\!.\, y \,\varepsilon\, u \,.\, x \,\mathrm{S}_u\, y \,.\, \overline{z\,\varepsilon}\, (z \,\varepsilon\, u . x \,\mathrm{S}_u\, z . z \,\mathrm{S}_u\, y) = \Lambda : -=_y \Lambda$. Def.
10. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\supset:\, \mathrm{Ntrasf}`u = \mathrm{Ntrasf}`v \,.=\, f \,\varepsilon\, (v \text{ f ord } u) \,.\, -=_f \Lambda$. Def.
11. $\mathrm{Ntrasf} = \overline{x\,\varepsilon}\, (u \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\, x = \mathrm{Ntrasf}`u \,.\, -=_u \Lambda)$. Def.
12. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\, \mathrm{Ntrasf}`u = \mathrm{Ntrasf}`v \,.\supset.\, u \backsim v$.
13. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\supset ::\, \mathrm{Ntrasf}`u > \mathrm{Ntrasf}`v \,.=\!.\!\cdot\!.\, \mathrm{Ntrasf}`u -= \mathrm{Ntrasf}`v \,.\, w \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\, w \supset u \,.\, \mathrm{Ntrasf}`w = \mathrm{Ntrasf}`v \,.\, -=_w \Lambda$. Def.
14. $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} \,.\supset: \beta < \alpha \,.=.\, \alpha > \beta$. Def.
15. $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} \,.\supset: \alpha = \beta \,.\smile.\, \alpha > \beta \,.\smile.\, \alpha < \beta$.
16. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset ::\, u = Y_m \,.=\!.\!\cdot\!.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord}\, \mathrm{N}_0 : 0 \,\varepsilon\, u : m' \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, m' -> m \,.=_{m'} .\, m' \,\varepsilon\, u : m', m'' \,\varepsilon\, u \,.\, m' < m'' \,.\supset_{m',m''}\, m' \,\mathrm{S}_u\, m''$. Def.
17. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Ntrasf}`\, Y_m = m + 1 = \mathrm{num}\, Y_m$. Def.
18. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\, \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Ntrasf}`\, u = \mathrm{num}\, u$.
19. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K\, bord} \,.\, \mathrm{num}\, u = \infty \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Ntrasf}`u > m$.
20. $u = \omega .=\!.\!\cdot\!. u \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} : m \,\varepsilon\, \mathrm{N} .\supset_m . u > m : \alpha \,\varepsilon (\mathrm{Ntrasf} - \mathrm{N}) . \alpha < u \,.=\, \Lambda$. Def.
21. $\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} .\supset :: u = Y_\alpha \,.=\!.\!\cdot\!. u \,\varepsilon\, \mathrm{K bord\, Ntrasf} : 0 \,\varepsilon\, u : \alpha' \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf}. \alpha' -> \alpha \,.=_\alpha .\, \alpha' \,\varepsilon\, u : \alpha', \alpha'' \,\varepsilon\, u \,.\, \alpha' < \alpha'' \,.\supset_{\alpha',\,\alpha''} .\, \alpha' \,\mathrm{S}_u\, \alpha''$. Def.
22. $\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} \,.\supset.\, \mathrm{Ntrasf}`\,(Y_\alpha - \alpha) = \alpha$. Def.

---

3. Cantor, XLIX, p. 59.
4. » » p. 60.
5. » » p. 59, 60.
7. Gutberlet, XL, p. 183.
9. Cantor, XVIII, p. 4.
10. » » p. 5.
12. » XLIX, p. 74.
13. Cantor, XLIX, p. 26.
15. » » p. 26.
17. » XVIII, p. 3.
18. » » p. 3.
20. » » p. 33; » XLIX, p. 34.
22. » XVIII, p. 15.

23. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{K\,bord} . u \cap v = \Lambda .\therefore w \,\varepsilon\, \mathrm{K\,ord} : w = u \cup v : x, y \,\varepsilon\, u . x \mathrm{S}_u y . \supset_{x,y} . x \mathrm{S}_w y : x, y \,\varepsilon\, v . x \mathrm{S}_v y . \supset_{x,y} . x \mathrm{S}_w y : x \,\varepsilon\, u . y \,\varepsilon\, v . \supset_{x,y} . x \mathrm{S}_w y :: \supset . w \,\varepsilon\, \mathrm{K\,bord}$.

24. » » » $\mathrm{Ntrasf}`u = \alpha . \mathrm{Ntrasf}`v = \beta : \supset . \mathrm{Ntrasf}`w = \alpha + \beta$. Def.

25. $v \,\varepsilon\, \mathrm{K bord} : u \,\varepsilon\, v . \supset_u . u \,\varepsilon\, \mathrm{K\,bord} : u, u' \varepsilon\, u . \supset_{u,u'} . u \cap u' = \Lambda :: w \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} .\therefore x \,\varepsilon\, u . u \,\varepsilon\, v . = x \,\varepsilon\, w : u \,\varepsilon\, v . x, y \,\varepsilon\, u . x S_u y . \supset_{x,y,u} . x S_w y : u, u' \varepsilon\, v . u S_v u' . x \,\varepsilon\, u . y \,\varepsilon\, u' . \supset_{x,y,u,u'} . x S_w y :\therefore \supset : w \,\varepsilon\, \mathrm{K\,bord}$.

26. » » » $\mathrm{Ntrasf}`v = \beta : u \,\varepsilon\, v . \supset_u . \mathrm{Ntrasf}`u = \alpha .\therefore \supset . \mathrm{Ntrasf}`w = \alpha \beta$. Def.

27. $\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{II} . = : \alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} . Y_\alpha \backsim N$. Def.

28. $\mathrm{II} - \backsim \mathrm{N}$.

29. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K\,II} . u \backsim \mathrm{N} . \max u = \Lambda : \supset . \overline{\beta \varepsilon} (\beta \,\varepsilon\, \mathrm{II} . u \supset Y_\beta : \beta' \varepsilon\, (Y_\beta - \beta) . \supset_{\beta'} . u - \supset Y_{\beta'}) . - = \Lambda$.

30. $\beta \,\varepsilon\, \mathrm{K}(\mathrm{N} \cup \mathrm{II}) . \alpha_\beta \,\varepsilon\, \mathrm{K\,II} : \beta', \beta'' \varepsilon\, \beta . \beta' < \beta'' . \supset_{\beta', \beta''} . \alpha_{\beta'} > \alpha_{\beta''} .\therefore \supset . \mathrm{num}\, \alpha_\beta \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.

31. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K\,II} . \supset . \min u - = \Lambda$.

32. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K\,II} . \supset : \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \cup . u \backsim \mathrm{N} . \cup . u \backsim \mathrm{II}$.

33. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K} . u \backsim \mathrm{N} . \alpha \,\varepsilon\, \mathrm{II} : \supset_\alpha : v \,\varepsilon\, \mathrm{K\,bord} . v = u . \mathrm{Ntf}`v = \alpha . - =_v \Lambda$.

34. $\alpha, \beta, \gamma \,\varepsilon\, \mathrm{N} \cup \mathrm{II} . \supset : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma . \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma . \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

35. $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \mathrm{N} \cup \mathrm{II} . \alpha + \beta - = \beta + \alpha . - =_{\alpha,\beta} \Lambda$.

» $. \alpha\beta - = \beta\alpha . - =_{\alpha,\beta} \Lambda$.

36. $\alpha, \beta, \gamma \,\varepsilon\, \mathrm{N} \cup \mathrm{II} . \supset : \alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma . \alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Def.

37. $u = \Omega . = .\cdot u \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} : \mathrm{II} \supset Y_u : \beta \,\varepsilon\, \mathrm{Ntrasf} . \beta < u . \mathrm{II} \supset Y_\beta . = \Lambda$. Def.

38. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \mathrm{q}_n . = : u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq}_n . \mathrm{El}_1 u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} . \mathrm{El}_2 u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} ... \mathrm{El}_n u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}$. Def.

---

23. Cantor, XVIII, p. 6.
24. » » »
25. » » p. 7.
26. » » »
27. » » p. 35.
28. » » »
29. » » »
30. » » p. 37.
31. Cantor, XVIII, p. 37.
32. » » p. 38.
33. » » p. 5.
34. » » p. 7, 39; » XLIX, p. 26.
35. » XVIII, p. 6, 7.
37. » » p. 38.
38. » XLIX, p. 68.

39. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} \,.\, \supset .\, \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime} u = \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime} v \,.=.\, f \,\varepsilon\, (v \text{ ford } u) -=_f \Lambda$. Def.

40. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \,.\, \supset : \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} u = \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} v \,.=.\, \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_1 u = \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_1 v \,.\, \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_2 u = \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_2 v \ldots \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_n u = \mathrm{Ty}_1{}^{\backprime}\, \mathrm{El}_n v$. Def.

41. $\mathrm{Ty}_n = \overline{x\,\varepsilon}\, (u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \,.\, x = \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} u \,.-=_u \Lambda)$. Def.

42. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \mathrm{q}_n \,.\, u \frown v = \Lambda \,.\, w \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \mathrm{q}_n \,.\, w = u \smile v : x, y \,\varepsilon\, u \,.\, i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\, x_i \mathrm{S}_u y_i \,.\, \supset_{x,y,i} .\, x_i \mathrm{S}_w y_i : x, y \,\varepsilon\, v . i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\, x_i \mathrm{S}_v y_i \,.\, \supset_{x,y,i} .\, x_i \mathrm{S}_w y_i : x \,\varepsilon\, u \,.\, y \,\varepsilon\, v \,.\, i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\, \supset_{x,y,i} .\, x_i \mathrm{S}_w y_i : \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} u = \alpha \,.\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} v = \beta \,.\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} w = \gamma \,.\!\cdot\!.\, \supset .\, \gamma = \alpha + \beta$. Def.

43. $v \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \,.\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} v = \beta : u \,\varepsilon\, v \,.\, \supset_u .\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \mathrm{q}_n \,.\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} u = \alpha : u, u' \,\varepsilon\, v \,.\, \supset_{u,u'} .\, u \frown u' = \Lambda : w \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \mathrm{q}_n \,.\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} w = \gamma : x \,\varepsilon\, u \,.\, u \,\varepsilon\, v \,.=.\, x \,\varepsilon\, w : u' \,\varepsilon\, v \,.\, x, y \,\varepsilon\, u' \,.\, i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\, x_i \mathrm{S}_{u'} y_i \,.\, \supset_{u',x,y,i} .\, x_i \mathrm{S}_w y_i : u', u'' \,\varepsilon\, v \,.\, x \,\varepsilon\, u' \,.\, y \,\varepsilon\, u'' \,.\, i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\, u'_i \mathrm{S}_v u''_i \,.\, \supset_{u',u'',x,y,i} .\, x_i \mathrm{S}_w y_i :: \supset .\, \gamma = \alpha\beta$. Def.

44. $\alpha, \beta, \gamma \,\varepsilon\, \mathrm{Ty}_n \,.\, \supset : \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \,.\, \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \,.\, \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

45. $\alpha, \beta \,\varepsilon\, \mathrm{Ty}_n \,.\, \alpha + \beta -= \beta + \alpha \,.-=_{\alpha,\beta} \Lambda$.

$\alpha\beta -= \beta\alpha \,.-=_{\alpha,\beta} \Lambda$.

46. $\alpha, \beta, \gamma \,\varepsilon\, \mathrm{Ty}_n \,.\, \supset : \alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \,.\, \alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$. Def.

47. $m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \Phi(m, n) = \mathrm{num}\, \overline{\alpha\,\varepsilon}\, (\alpha \,\varepsilon\, \mathrm{Ty}_n : u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord}_n \,.\, \mathrm{num}\, u = m \,.\, \supset_u .\, \mathrm{Ty}_n{}^{\backprime} u = \alpha)$. Def.

48. $$\Phi(m,n) = \sum_{\substack{\gamma_i = 0,1,\ldots,l_i - 1 \\ i = 1,2,\ldots,n \\ l_i = 1,2,\ldots,m}} (-1)^{\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n} \binom{l_1}{\gamma_1}\binom{l_2}{\gamma_2} \ldots \binom{l_n}{\gamma_n} \binom{(l_1 - \gamma_1)(l_2 - \gamma_2)(l_n - \gamma_n)}{m} .$$

§ 3.

1. $\gamma \,\varepsilon\, \mathrm{I} \smile \mathrm{II} \,.\, D^{\gamma} u \backsim \mathrm{N} \,.\, \supset .\, u \backsim \mathrm{N}$.

2. $u - \backsim \mathrm{N} \,.\, Du \supset u \,.\, \supset .\!\cdot\!.\, u = v \smile w \,.\, v \backsim \mathrm{N} \,.\, w = Dw \,.\, \gamma \,\varepsilon\, \mathrm{I} \smile \mathrm{II} \,.\, D^{\gamma} u = w : -=_{v,w,\gamma} \Lambda$.

---

39. Cantor, XLIX, p. 71.
40. » » »
41. » » »
42. » » p. 76.
43. » » p. 77.
44. » » p. 76, 78.
45. » » »
47. Cantor, XLIX, p. 82.
48. Schwarz, LI, p. 11.

§ 3.

1. Cantor, XII, tr. fr., p. 376.
2. » XXIII, p. 471.

3. $Du \backsim N . \supset : \gamma \varepsilon I \cup II . D^{\gamma} u = \Lambda . - =_{\gamma} \Lambda$.

4. $\gamma \varepsilon I \cup II . D^{\gamma} u = \Lambda . \supset . u \backsim Du \backsim N$.

5. $Du - \backsim N . \supset . \overline{x \varepsilon} (\gamma \varepsilon I \cup II . \supset_{\gamma} . x \varepsilon D^{\gamma} u) - = \Lambda$.

6. $D^{\Omega} u = \overline{x \varepsilon} (\gamma \varepsilon I \cup II . \supset_{\gamma} . x \varepsilon D^{\gamma} u) = \cap ' D^{N \cup II} u$. Def.

7. $Du - D^{\Omega} u \backsim N$.

G. Vivanti.

---

3. Cantor, XVIII, p. 7-8, 31.
4. » » »
5. Bendixson, XX, p. 419.
6. Bendixson, XX, p. 419.
7. » » »
Phragmén, XXVI.

Lista bibliografica fino a tutto l'anno 1893.

I. G. Cantor. *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* Math. Ann., T. 5, 1872, p. 123-132. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 336-348.

II. G. Cantor. *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen.* Journ. für Math., T. 77, 1874, p. 258-272. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 305-310.

III. G. Cantor. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journ. für Math., T. 84, 1877, p. 242-258. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 311-328.

IV. U. Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali,* Pisa 1878. Deutsche Uebersetzung von J. Lüroth und A. Schepp, Leipzig 1892.

V. J. Thomae. *Sätze aus der Functionentheorie.* Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1878, p. 466-468.

VI. J. Lüroth. *Ueber gegenseitig eindeutige und stetige Abbildung von Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen auf einander.* Sitzungsberichte der phys.-med. Societät zu Erlangen, T. 10, 1878, p. 190-195.

VII. G. Cantor. *Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten.* Nachr. von der Ges. der Wiss. zu Göttingen, 1879, p. 127-135.

VIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,* I. Math. Ann., T. 15, 1879, p. 1-7. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 349-356.

IX. E. Netto. *Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.* Journ. für Math., T. 86, 1879, p. 263-268.

X. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten,* II. Math. Ann, T. 17, 1880, p. 355-358. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 357-360.

XI. G. Cantor. *Id.*, III. Math. Ann., T. 20, 1882, p. 113-121. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 361-371.

XII. G. Cantor. *Id.*, IV. Math. Ann., T. 21, 1882, p. 51-58. Trad. fr. in Acta Math., T. 2, 1883, p. 372-380.

XIII. G. Mittag-Leffler. *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable.* Comptes rendus des séances de l'Ac. des Sc. de Paris, T. 94, 1882, p. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; T. 95, 1882, p. 335-336.

XIV. P. du Bois-Reymond. *Die allgemeine Functionentheorie*, I, Tübingen 1882. Tr. fr. di G. Milhaud e A. Girot, Paris 1887.

XV. W. Veltmann. *Ueber die Anordnung unendlich vieler Singularitäten einer Function.* Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 176-179.

XVI. W. Veltmann. *Die Fourier'sche Reihe.* Zeitschr. für Math. und. Ph., T. 27, 1882, p. 193-235.

XVII. W. Veltmann. *Zur Theorie der Punktmengen.* Zeitschr. für Math. und Ph., T. 27, 1882, p. 313-314,

XVIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, V. Math. Ann., T. 21, 1883, p. 545-596. Pubblicato anche a parte sotto il titolo: *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*, Leipzig 1883. Estratto in francese: Acta Math., T. 2, 1883, p. 381-408.

XIX. G. Cantor. *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à* n *dimensions. Première communication.* Acta Math., T. 2, 1883, p. 409-414.

XX. I. Bendixson. *Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points.* Acta Math., T. 2, 1883, p. 415-429.

XXI. I. Bendixson. *Några studier öfver oändliga punktmängder.* Ofvers. af vet. akad. förhandlingar (Stockholm), T. 40, 1883, n° 2, p. 31-35.

XXII. M. Guichard. *Théorie des points singuliers essentiels.* Ann. sc. de l'éc. norm. sup., S. II, T. 12, 1883, p. 301-394.

XXIII. G. Cantor. *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, VI. Math. Ann., T. 23, 1884, p. 453-488.

XXIV. G. Mittag-Leffler. *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante.* Acta Math., T. 4, 1884, p. 1-79.

XXV. G. Cantor. *De la puissance des ensembles parfaits de points.* Acta Math., T. 4, 1884, p. 381-392.

XXVI. E. Phragmén. *Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre.* Acta Math., T. 5, 1884, p. 47-48.

XXVII. E. Phragmén. *En n sats inom teorien för punktmängder.* Ofvers. af vet. ak. förh. (Stockholm), T. 41, 1884, n° 1, p. 121-124.

XXVIII. L. Scheeffer. *Allgemeine Untersuchungen überRectification der Curven.* Acta Math. T. 5, 1884, p. 49-82.

XXIX. L. Scheeffer. *Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen.* Acta Math., T. 5, 1884, p. 183-194, 279-296.

XXX. I. Bendixson. *Sur la puissance des ensembles parfaits de points.* Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 6.

XXXI. I. Bendixson. *Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles.* Bihang till vet. ak. handlingar (Stockholm), T. 9, 1884, n° 7.

XXXII. P. Tannery. *Note sur la théorie des ensembles.* Bull. de la soc. math. de France, T. 12, 1884, p. 90 96.

XXXIII. G. Ascoli. *Le curve limite di una varietà data di curve.* Mem. dell'Acc. dei Lincei, Serie III, T. 18, 1884, p. 521-586.

XXXIV. O. STOLZ. *Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth*. Math. Ann., T. 23, 1884, p. 152-156.

XXXV. A. HARNACK. *Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige*. Math. Ann., T. 23, 1884, p. 285-288.

XXXVI. M. LERCH. *Prispevek k nauce o mnozinach bodu v rovine*. Sitzungsb. d. böhmischen Ges. der Wiss. (Prag), 1884, p. 176-178.

XXXVII. E. PHRAGMÉN. *Ueber die Begrenzungen von Continua*. Acta Math., T. 7, 1885, p. 43-48.

XXXVIII. G. CANTOR. *Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume G_n*. Acta Math., T. 7, 1885, p. 105-124.

XXXIX. A. HARNACK. *Ueber den Inhalt von Punktmengen*. Math. Ann., T. 25, 1885, p. 241-250.

XL. C. GUTBERLET. *Das Problem des Unendlichen*. Zeitschr. für Philosophie (Halle), T. 88, 1885, p. 179-223.

XLI. F. MEYER. *Elemente der Arithmetik und Algebra*, Halle 1885.

XLII. B. KERRY. *Ueber G. Cantor 's Mannigfaltigkeitsuntersuchungen*. Vierteljahrssch. für wissenschaftliche Philosophie, T. 9, 1885, p. 191-232.

XLIII. P. TANNERY. *Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et Georg Cantor*. Revue philosophique, octobre 1885.

XLIV. G. ENESTRÖM. *Om G. Cantor 's uppsats: Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen*. Ofvers. af vet. ak. förh., T. 42, 1885, n° 10, p. 69-70.

XLV. G. CANTOR. *Ueber die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen*. Bihang till vet. akad. handlingar T. 11, 1886, n° 19. Il principio di questo scritto fu riprodotto in Zeitschr. für Phil., T. 88, 1886, p. 224-233, e in Natur und Offenbarung (Münster), T. 32, 1886, p. 46-49. La fine fu pubblicata a parte sotto il titolo: *Zur Frage des actualen Unendlichen*.

XLVI. M. LERCH. *O soustavách bodu a jich vznamu v anal si*. Casopis pro pestovani mathem. (Praga), T. 15, 1886, p. 211.

XLVII. O. BIERMANN. *Theorie der analytischen Functionen*, Leipzig 1887.

XLVIII. G. LORIA. *La definizione dello spazio a n dimensioni e l'ipotesi di continuità del nostro spazio secondo le ricerche di Giorgio Cantor*. Giorn. di mat., T. 25, 1887, p. 97-108.

XLIX. G. CANTOR. *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*. Zeitschr. für Phil., T. 91 e 92, 1887.

L. K. BECKMAN. *Om dimensionsbegreppet och dess bet delse för matematiken*, Upsala, 1888.

LI. H. SCHWARZ. *Ein Beitrag zur Theorie der Ordnungstypen*, Halle 1888.

LII. R. BETTAZZI. *Su una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo ambedue lineari*. Annali di mat., Serie II, T. 16, 1888, p. 49-60.

LIII. R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Braunschweig 1888.

LIV. G. ASCOLI. *Riassunto della mia memoria: « Le curve limite di una*

varietà data di curve », *ed osservazioni critiche alla medesima.* Rendiconti dell'Ist. Lomb., Serie II, T. 21, 1888, p. 226-239, 257-265, 294-300, 365-371.

LV. G. VIVANTI. *Fondamenti della teoria dei tipi ordinati.* Ann. di mat., Serie II, T. 17, 1889, p. 1-35.

LVI. C. ARZELÀ. *Funzioni di linee.* Rend. dell'Acc. dei Lincei, Serie IV, T. 5, 1889, 1° sem., p. 342-348.

LVII. G. PEANO. *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* Torino 1889.

LVIII. R. DE PAOLIS. *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi.* Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), Serie III, T. 3, 1890.

LIX. G. PEANO. *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane.* Math. Ann., T. 36, 1890, p. 157-160.

LX. G. PEANO. *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.* Math. Ann., T. 37, 1890, p. 182-228.

LXI. D. HILBERT. *Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.* Naturf. Ges. Bremen, 1890, p. 11-12; Math. Ann., T. 38, 1891, p. 459-460.

LXII. S. DICKSTEIN. *Pojęcia i metody matematyki,* I, Warszawa 1891.

LXIII. G. VERONESE. *Fondamenti di geometria,* Padova 1891. Deutsche Uebersetzung von A. Schepp, Leipzig 1894.

LXIV. G. VIVANTI. *Notice historique sur la théorie des ensembles.* Bibliotheca mathem., T. 6, 1892, p. 9-25.

LXV. L. MILESI. *Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni.* Rivista di Matematica, T. 2, 1892, p. 103-106.

LXVI. G. CANTOR. *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresbericht d. deutsch. Mathematiker-Vereinigung, T. 1, 1 92, p. 75-78. Tr. it. di G. Vivanti in Riv. di mat., T. 2, 1892, p. 165-167.

LXVII. E. AMIGUES. *La théorie des ensembles et les nombres incommensurables.* Ann. de la Fac. des Sc. de Marseille, T. 2, 1892, p. 33-43.

LXVIII. F. GIUDICE. *Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di G. Cantor.* Rend. del Circ. Mat. di Palermo, T. VI, 1892, p. 161-164.

LXIX. C. JORDAN. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique, II éd., T. I,* Paris 1892-93.

LXX. G. PEANO. *Lezioni di analisi infinitesimale,* Torino 1893.

Avvertenze. — L'indicazione delle pagine del N. XVIII nelle note si riferisce all'edizione a parte.

L'indicazione delle pagine del N. XLIX si riferisce ad un opuscolo contenente i NN. XLV e XLIX, e portante il titolo: *Zur Lehre vom Transfiniten, gesammelte Abhandlungen aus der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* Halle-Saale, Pfeffer, 1890, 93 pag. 8°.

VII.

§ 1.

$u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'u = \infty \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q\,f}u \,.\supset ::$

1. $y \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset \therefore y \,\varepsilon\, \lim_{x,u,\infty} fx \,. =: h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset_{h,a} .\, f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \cap (y-h)\overline{}(y+h) -= \Lambda \,.$ Def.
2. $\infty \,\varepsilon\, \lim_{x,u,\infty} fx . =: m \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . a \,\varepsilon\, \mathrm{q} .\supset_{m,a} .\, f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \cap (m+\mathrm{Q}) -= \Lambda \,.$ Def.
3. $-\infty$ » $.=:$ » $\cap (-m-\mathrm{Q}) -= \Lambda .$ Def.
4. $m \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . \lim_{x,u,\infty} fx = \lim_{x, u \cap (m+\mathrm{Q}), \infty} fx \,.$
5. $v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, v \supset u \,.\, \mathrm{l}'v = \infty \,.\supset .\, \lim_{x,v,\infty} fx \supset \lim_{x,u,\infty} fx.$

$u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'u = \infty \,.\, f \,\varepsilon\, \mathrm{q\,f}u \,.\, \lim = \lim_{x,u,\infty} .\supset ::$

11. $\lim fx -= \Lambda \,.$
12. $f \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f}u \,.\supset .\, \lim fx \supset \mathrm{Q}_0 \cup \iota\infty \,.$
13. $f \,\varepsilon\, (-\mathrm{Q})\mathrm{f}u . \supset .$ » $-\mathrm{Q}_0 \cup \iota(-\infty) \,.$
14. $h \,\varepsilon\, \mathrm{q} .\therefore a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset_a : b \,\varepsilon\, u \cap (a+\mathrm{Q}) \,.\,.\, \mathrm{m}\, fb < h \,. -=_b \Lambda :: \supset . \mathrm{q} \cap \lim fx -= \Lambda .$
15. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m}\, f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\supset .\, \mathrm{q} \cap \lim fx -= \Lambda \,.$
16. » $.\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'\mathrm{m}\, v \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \supset v \,.\supset .\, \lim fx \supset Cv \,.$
17. $\mathrm{l}' \lim fx \,\varepsilon\, \lim fx \,.$
18. l_1 » »
19. $\mathrm{l}' \lim fx = \max \lim fx \,.$
20. $\mathrm{l}_1 \lim fx = \min \lim fx \,.$

---

§ 1. 1. CAUCHY. *Analyse Algébrique,* Paris, 1821, pag. 13. « Quelquefois ... une expression converge à-la-fois vers plusieurs limites différentes les unes des autres. »

1-5, 11-20, 31-33. PEANO. *Sulla definizione del limite d'una funzione* (Rivista di Matematica, t. II, a. 1892, pag. 77-79). — *Lezioni di analisi infinitesimale.* Torino, 1893, vol. I, pag. 259-265, vol. II, pag. 53-57.

21. D lim fx Ɔ lim fx.
22. v ε Kq . Dv Ɔ v . Ɔ : f ε q f N . lim $fx = v$. −$=_f$ Λ .

u ε Kq . l′ $u = \infty$. f ε q f u . lim = $\lim_{x,u,\infty}$. y ε q . Ɔ ∴
31. y ε lim fx . = . 0 ε lim $(fx - y)$.
32. » . = . a ε q . Ɔ . y ε $Cf[u \cap (a + \mathrm{Q})]$ ∴
33. y −ε lim fx .=: h ε Q . a ε q . $f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \cap y-h$ ‾ $y+h = \Lambda$. −$=_{h,a}$ Λ .

§ 2.

u ε Kq . l′ $u = \infty$. f ε q f u . lim = $\lim_{x,u,\infty}$. Ɔ :
1. y ε q . Ɔ :: y = lim fx .=∴ h ε Q . $Ɔ_h$: a ε q . $f(u \cap (a+\mathrm{Q}))$ Ɔ $(y-h)$‾$(y+h)$. −$=_a$ Λ .
2. ∞ = lim fx .=∴ m ε Q . $Ɔ_m$: a ε q . $f(u \cap (a+\mathrm{Q}))$ Ɔ m + Q . −$=_a$ Λ .
3. $-\infty$ = » » » Ɔ $-m-$Q »
4. lim fx ε q . = :: h ε Q . $Ɔ_h$ ∴ x' ε q : x_1, x_2 ε $u \cap (x' + \mathrm{Q})$. $Ɔ_{x_1, x_2}$. mod $(fx_1 - fx_2) < h$: −$=_{x'}$ Λ .
5. » . = :: » x' ε u : x ε $u \cap (x'+\mathrm{Q})$. $Ɔ_x$. mod $(fx - fx') < h$: −$=_{x'}$ Λ .
6. lim fx ε q ∪ ι ∞ ∪ ι −∞ . = . l′ lim fx = l_1 lim fx .
7. y ε q . Ɔ : y = lim fx . = . 0 = lim $(fx - y)$.
8. v ε Kq . v Ɔ u . l′ $v = \infty$. $\lim_{x,u,\infty} fx$ ε q ∪ ι ∞ ∪ ι −∞ . Ɔ . $\lim_{x,v,\infty} fx$ = $\lim_{x,u,\infty} fx$.

11. f ε (q f u) cres . =: x, y ε u . $x < y$. $Ɔ_{x,y}$. $fx < fy$. Def.
12. f ε (q f u) cres_0 . =: » $\leqq$ » Def.
13. f ε (q f u) dec . = : » $>$ » Def.
14. f ε (q f u) dec_0 . =: » $\geqq$ » Def.
15. f ε (q f u) cres_0 . Ɔ . lim fx ε q ∪ ι ∞ . lim fx = l′ fu .
16. » dec_0 . Ɔ . » q ∪ ι −∞ . » = $\mathrm{l}_1 fu$.

21, 22. BETTAZZI. *Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, VI, pag. 173).

§ 2. 1-5, 15, 16. DINI. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale,* p. 21.

6. P. DU BOIS-REYMOND. *Allgemeine Functionentheorie,* p. 266. — BOLZANO, V. STOLZ. *Vorl. ü. Arith,* I, p. 166.

7, 8. PEANO. *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. II, pag. 59, 61.

17. $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \lim a = a \,.$

21. $y \varepsilon \lim_{x, \mathrm{N}, \infty} f x \,.\, \supset : v \varepsilon \mathrm{K\,N} \,.\, \lim_{x, v, \infty} f x = y \,.\, -=_v \Lambda \,.$

22. $m \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num} \lim f x = m \,.\, \supset :: v_1, v_2, \ldots v_m \varepsilon \mathrm{K}\, u \,.\, u = v_1 \smile v_2 \smile \ldots \smile v_m :$
$r \varepsilon \mathrm{Z}_m \,.\, \supset_r \,.\, \lim_{x, v_r, \infty} f x \,\varepsilon\, \lim_{x, u, \infty} f x \,.\!\cdot.\, y \varepsilon \lim f x \,.\, \supset_y : r \varepsilon \mathrm{Z}_m \,.$
$\lim_{x, v_r, \infty} f x = y \,.\, -=_r \Lambda \,.\!\cdot.\, -=_{v_1, v_2 \ldots v_m} \Lambda \,.$

23. $\mathrm{num} \lim f x = \infty \,.\, \lim f x \backsim \mathrm{N} \,.\, \supset :: v \varepsilon (\mathrm{K}\, u) f \mathrm{N} \,.\, u = \smile ' v_{\mathrm{N}} : r \varepsilon \mathrm{N} \,.$
$\supset_r \,.\, \lim_{x, v_r, \infty} f x \,\varepsilon\, \lim_{x, u, \infty} f x \,.\!\cdot.\, y \varepsilon \lim f x \,.\, \supset_y : r \varepsilon \mathrm{N} \,.\, y =$
$\lim_{x, v_r, \infty} f x \,.\, -=_r \Lambda \,.\!\cdot.\, -=_v \Lambda \,.$

§ 3.

$u \varepsilon \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}' u = \infty \,.\, f, g \,\varepsilon\, \mathrm{q\,f}\, u \,.\, \lim = \lim_{x, u, \infty} \,.\, \supset :$

1. $a \varepsilon \mathrm{q} : x \varepsilon u \frown (a + \mathrm{Q}) \,.\, \supset_x \,.\, f x > g x : \supset \,.\, \max \lim f x \geqq \max \lim g x \,.$
2. » » » min » min »
3. » » » $: \lim f x \,,\, \lim g x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \smile \iota (\pm \infty) : \supset .$
$\lim f x \geqq \lim g x \,.$
4. $\lim f x \,,\, \lim g x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \smile \iota (\pm \infty) \,.\, \lim f x > \lim g x \,.\, \supset \,.\!\cdot.\, a \varepsilon \mathrm{q} : x \varepsilon u \frown$
$(a + \mathrm{Q}) \,.\, \supset_x \,.\, f x > g x : -=_a \Lambda \,.$
5. $\lim f x \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset : a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, f (u \frown (a + \mathrm{Q})) \supset \mathrm{Q} \,.\, -=_a \Lambda \,.$
6. $k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k \,.\!\cdot.\, x \varepsilon u : x_1, x_2 \,\varepsilon\, u \frown (x + \mathrm{Q}) \,.\, \supset_{x_1 . x_2} \,.\, \mathrm{m} [f x_1 - g x_2] < k :$
$-=_x \Lambda :: \supset \,.\, \lim f x \,,\, \lim g x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \lim f x = \lim g x \,.$
7. $\mathrm{Hp\,P6} \,.\!\cdot.\, x', x'' \varepsilon u \,.\, \supset_{x', x''} \,.\, f x' > g x'' :: \supset \,.\, \lim f x = \mathrm{l}_1 f u = \mathrm{l}' g u = \lim g x \,.$
8. » » » $.\!\cdot.\, a \varepsilon \mathrm{q} : x', x'' \varepsilon u \,.\, \supset_{x', x''} \,.\, a \,\varepsilon\, g x' \frown f x'' ::$
$\supset \,.\, a = \lim f x = \lim g x \,.$
9. $y \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \lim f x = \lim g x = y : \supset :: k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \supset_k \,.\!\cdot.\, x \varepsilon u : x_1, x_2 \,\varepsilon\, u \frown (x + \mathrm{Q}) \,.$
$\supset_{x_1, x_2} \,.\, \mathrm{m} [f x_1 - g x_2] < k : -=_x \Lambda \,.$

16. $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} a \begin{cases} +x \\ -x \end{cases} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} .$

17. $a \varepsilon \begin{cases} +\mathrm{Q} \\ -\mathrm{Q} \end{cases} . \supset . \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} a x = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} .$

18. $a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} \dfrac{a}{x} = 0 \,.$

19. $a \varepsilon 1 + \mathrm{Q} \,.\, \supset \,.\, \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} a^x = + \infty \,.$

---

21. Bettazzi, l. c.

22, 23. Giudice. *Sulle Successioni* (Rendiconti del Circolo di Palermo, V, pag. 280).

20. $a = 1 . \supset . \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} a^x = 1 .$

21. $a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q}) . \supset . \lim_{x, \mathrm{q}, \infty} a^x = 0 .$

22. $a \varepsilon 1 + \mathrm{Q} . \supset . \lim_{x, \mathrm{Q}, \infty} \mathrm{Log}_a x = + \infty .$

23. $a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q}) . \supset . \lim_{x, \mathrm{Q}, \infty} \mathrm{Log}_a x = - \infty .$

24. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \lim_{x, \mathrm{Q}, \infty} x^a = + \infty .$

25. $a \varepsilon - \mathrm{Q} . \supset . \lim_{x, \mathrm{Q}, \infty} x^a = 0 .$

26. $a \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim (a + f x) = a + \lim f x .$

27. $\lim (f x + g x) \supset \lim f x + \lim g x .$

28. $\lim f x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim (f x + g x) = \lim f x + \lim g x .$

29. $\lim f x = + \infty . - \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x + g x) = + \infty .$

30. $\lim f x = - \infty . + \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x + g x) = - \infty .$

31. $\lim f , \lim g \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim (f x \pm g x) = \lim f x \pm \lim g x .$

32. $\lim f x = \lim g x = \begin{matrix} + \infty \\ - \infty \end{matrix} . \supset . \lim (f x + g x) = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$

33. $a \varepsilon \mathrm{q} - \iota 0 . \supset . \lim a f x = a \lim f x .$

34. $a \varepsilon \mathrm{q} . \lim f x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim a f x \varepsilon \mathrm{q} .$

35. $a \varepsilon \mathrm{Q} . \lim f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} . \supset . \lim a f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$

36. $a \varepsilon - \mathrm{Q} . \lim f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} . \supset . \lim a f x = \begin{cases} - \infty \\ + \infty \end{cases} .$

37. $\lim [f x \times g x] \supset \lim f x \times \lim g x .$

38. $\lim f x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim [f x \times g x] = \lim f x \times \lim g x .$

39. $\lim f x = 0 . \pm \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x \times g x) = 0 .$

40. $\lim \mathrm{mod} f x = \infty . 0 - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim \mathrm{mod} (f x \times g x) = \infty .$

41. $\lim f x , \lim g x \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \lim (f x \times g x) = \lim f x \times \lim g x .$

42. $f \varepsilon (\mathrm{q} - \iota 0) \mathrm{f} u . 0 , \pm \infty - \varepsilon \lim f x . \supset . \lim \frac{1}{f x} = \frac{1}{\lim f x} .$

43. $0 \varepsilon \lim f x . \supset . \infty \varepsilon \lim \mathrm{mod} \frac{1}{f x} .$

44. $\pm \infty \varepsilon \lim f x . \supset . 0 \varepsilon \lim \frac{1}{f x} .$

45. $\lim f x \varepsilon \mathrm{q} \cap - \iota 0 . \supset . \lim \frac{1}{f x} = \frac{1}{\lim f x} .$

46. $\lim f x = \pm \infty . \supset . \lim \frac{1}{f x} = 0 .$

47. $\lim f x = 0 . \supset . \lim \mathrm{mod} \frac{1}{f x} = \infty .$

48. $\lim f x = 0 . 0 - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim \frac{f x}{g x} = 0 .$

49. » » $. \supset . \lim \operatorname{mod} \frac{g x}{f x} = \infty .$

50. $\lim \operatorname{mod} f x = \infty . \pm \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim \operatorname{mod} \frac{f x}{g x} = \infty .$

51. » » $. \supset . \lim \frac{g x}{f x} = 0 .$

52. $0 , \pm \infty - \varepsilon \lim f x \frown \lim g x . \supset . \lim \frac{f x}{g x} \supset \frac{\lim f x}{\lim g x} .$

53. $\lim f x \,\varepsilon\, q . \lim g x \,\varepsilon\, q \frown - \iota 0 . \supset . \lim \frac{f x}{g x} = \frac{\lim f x}{\lim g x} .$

54. $f \,\varepsilon\, Q \mathrm{f} u . a \,\varepsilon\, q . \supset . \lim [f x]^{a} = [\lim f x]^{a} .$

55. $f \,\varepsilon\, Q \mathrm{f} u . a \,\varepsilon \begin{cases} + Q \\ - Q \end{cases} . \lim f x = + \infty . \supset . \lim [f x]^{a} = \begin{cases} + \infty \\ 0 \end{cases} .$

56. $a \,\varepsilon\, Q . \pm \infty - \varepsilon \lim f x . \supset . \lim a^{f x} = a^{\lim f x} .$

57. $a \,\varepsilon\, 1 + Q . + \infty \,\varepsilon \lim f x . \supset . + \infty \,\varepsilon \lim a^{f x} .$

58. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) . + \infty \,\varepsilon \lim f x . \supset . 0 \,\varepsilon \lim a^{f x} .$

59. $a \,\varepsilon\, 1 + Q . - \infty \,\varepsilon \lim f x . \supset . 0 \,\varepsilon \lim a^{f x} .$

60. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) . - \infty \,\varepsilon \lim f x . \supset . + \infty \,\varepsilon \lim a^{f x} .$

61. $a \,\varepsilon\, 1 + Q .$ ⎫ $+ \infty .$
62. $a = 1 .$ ⎬ $\lim f x = + \infty . \supset . \lim a^{f x} =$ $1 .$
63. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) .$ ⎭ $0 .$

64. $a \,\varepsilon\, 1 + Q .$ ⎫ $0 .$
65. $a = 1 .$ ⎬ $\lim f x = - \infty . \supset . \lim a^{f x} =$ $1 .$
66. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) .$ ⎭ $+ \infty .$

$f \,\varepsilon\, Q \mathrm{f} u . \supset :$

67. $a \,\varepsilon\, Q \frown - \iota 1 . 0 , \pm \infty - \varepsilon \lim f x . \supset . \lim \mathrm{Log}_{a} f x = \mathrm{Log}_{a} \lim f x .$

68. $a \,\varepsilon\, 1 + Q .$ ⎫ $+ \infty \,\varepsilon \lim f x . \supset .$ $+ \infty$
69. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) .$ ⎭ $- \infty$ $\Big\} \,\varepsilon \lim \mathrm{Log}_{a} f x .$

70. $a \,\varepsilon\, 1 + Q .$ ⎫ $0 \,\varepsilon \lim f x . \supset .$ $- \infty$
71. $a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) .$ ⎭ $+ \infty$ $\Big\} \,\varepsilon \lim \mathrm{Log}_{a} f x .$

72. $a \,\varepsilon\, Q \frown - \iota 1 . \lim f x \,\varepsilon\, Q . \supset . \lim \mathrm{Log}_{a} f x = \mathrm{Log}_{a} \lim f x .$

73. $\begin{matrix} a \,\varepsilon\, 1 + Q . \\ a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) . \end{matrix} \Big\} \lim f x = + \infty . \supset . \lim \mathrm{Log}_{a} f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$

74. $\begin{matrix} a \,\varepsilon\, 1 + Q . \\ a \,\varepsilon\, Q \frown (1 - Q) . \end{matrix} \Big\} \lim f x = 0 . \supset . \lim \mathrm{Log}_{a} f x = \begin{cases} - \infty \\ + \infty \end{cases} .$

75. $\lim f x \,\varepsilon\, Q . \lim g x \,\varepsilon\, q . \supset . \lim [f x^{g x}] = [\lim f x]^{\lim g x} .$

76. $\lim f x \,\varepsilon\, 1+\mathrm{Q} \,.\, \lim gx = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \,.\, \supset \,.\, \lim [f x^{gx}] = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$.

77. $\lim f x \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \frown (1-\mathrm{Q}) \,.\, \lim gx = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \,.\, \supset \,.\, \lim [f x^{gx}] = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$.

78. $\lim f x = +\infty \,.\, \lim g x \,\varepsilon\, \begin{cases} \mathrm{Q} \\ -\mathrm{Q} \end{cases} \,.\, \supset \,.\, \lim [f x^{gx}] = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$.

§ 4.

$f, g \,\varepsilon\, \mathrm{q\,f\,N} \,.\, \lim = \lim_{x, \mathrm{N}, \infty} \,.\, \supset :$

1. $\lim[f(x+1) - fx] \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty) . \supset . \lim(fx)/x = \lim[f(x+1) - fx]$.

2. $\lim f(x+1)/fx \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\infty \,.\, \supset \,.\, \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{f(x+1)}{fx}$.

3. $\lim fx, \lim gx = 0 : g \,\varepsilon\, \mathrm{dec} \,.\, \lim [f(x+1) - fx]/[g(x+1) - gx] \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .$
   $\lim fx/gx = \lim [f(x+1) - fx]/[g(x+1) - gx]$.

4. $\lim g x = \infty \,.\, g \,\varepsilon\, \mathrm{cres}$. » »

5. $g \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \Sigma_1^\infty\, gx = \infty \,.\, \lim \dfrac{fx}{gx} \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \lim \dfrac{f1 + f2 + \ldots + fx}{g1 + g2 + \ldots + gx} = \lim \dfrac{fx}{gx}$.

6. $\lim fx \,\varepsilon\, \mathrm{q} \cup \iota\infty . \supset . \lim \dfrac{f1 + f2 + \ldots + fx}{x} = \lim \sqrt[x]{f1 \,.\, f2 \,.\, \ldots \,.\, fx} = \lim fx.$

7. $\lim fx, \lim gx \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . \lim \dfrac{f1 \,.\, gx + f2 \,.\, g(x-1) + \ldots + fx \,.\, g1}{x} =$
   $\lim fx \times \lim gx$.

8. $g \,\varepsilon\, \mathrm{dec} . \lim gx = 0 . \lim (g1 + g2 + \ldots + gx) = +\infty \,.\, \lim \dfrac{f1 + f2 + \ldots + fx}{x}$
   $\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . \lim \dfrac{f1.g1 + f2.g2 + \ldots + fx.gx}{g1 + g2 + \ldots + gx} = \lim \dfrac{f1 + f2 + \ldots + fx}{x}$.

9. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a_1, a_2, \ldots a_n \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \lim\left[\sqrt[n]{(x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_n)} - x\right]$
   $= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$.

10. $\lim \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \,\varepsilon\, \mathrm{q}$.

---

§ 4. 1, 2. Cauchy. *Analyse Algébrique*, a. 1821, pag. 48, 53.

3, 4. Stolz. *Ueber die Grenzwerthe von Quotienten* (Math. Ann., Bd. XIV).

6-8. Cesàro. l. c., pag. 99-105.

9. Schlömilch. *Uebungsbuch z. Stud. d. höh: Analysis*, 1r Th., p. 5.

10, 11. Eulero. *Introductio*, I, § 115.

11. $\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. Def.

12. $\log = \mathrm{Log}_e$. Def.

13. $\lim fx \,\varepsilon\, q \,.\, \supset .\, \lim[1+fx/x]^x = \mathrm{e}^{\lim fx}$.

14. » $.\supset .\, \lim x\left[\sqrt[x]{fx}-1\right] = \log \lim fx$.

15. » $.\supset .\, \lim\left[\mathrm{e}^{f1} + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}f2} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}fx}\right] = \lim fx$.

16. $a\,,b \,\varepsilon\, Q \,.\supset .\, \lim\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^x = \sqrt{ab}$.

17. $a \,\varepsilon\, Q \,.\supset .\, \lim \frac{a^x}{x\,!} = 0$.

18. $\lim \frac{x}{\sqrt[x]{x\,!}} = \mathrm{e}$.

19. $\lim \frac{1}{x}\sqrt[x]{(x+1)(x+2)\ldots 2x} = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

20. $\begin{cases} p\,\varepsilon -1+Q \\ p\,\varepsilon -1-Q_0 \end{cases} .\supset .\, \lim \frac{1+2^p+3^p+\ldots+x^p}{x^{p+1}} = \begin{cases} \frac{1}{p+1} \\ \infty \end{cases}$.

21. $p\,\varepsilon -1+Q \,.\supset .\, \lim \frac{1+2^p+3^p+\ldots+x^p}{x^p} - \frac{x}{p+1} = \frac{1}{2}$.

22. $a \,\varepsilon\, q \,.\, r \,\varepsilon \begin{cases} Q\frown(1-Q) . \\ 1+Q_0 . \end{cases} \supset .\, \lim(a+ar+ar^2+\ldots+ar^x) = \begin{cases} \frac{a}{1-r} . \\ \pm\infty . \end{cases}$

23. $a\,,b \,\varepsilon\, q-(-N_0) \,. \begin{cases} a>b . \\ a=b .\supset .\, \lim \frac{b(b+1)\ldots(b+x+1)}{a(a+1)\ldots(a+x+1)} = \\ a<b . \end{cases} \begin{cases} 0 . \\ 1 . \\ \pm\infty . \end{cases}$

$f \,\varepsilon\, q\,f\,Q \,.\, n \,\varepsilon\, Q \,.\, \lim = \lim_{x,\,q,\,\infty} : \supset .$

31. $\lim \frac{f(x+1)-fx}{x^n} \,\varepsilon\, q : a, b \,\varepsilon\, q \,.\supset_{a,b} .\, \mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\, f(a\frown b) \,\varepsilon\, Q : \supset .\, \lim \frac{fx}{x^{n+1}}$
$= \lim \frac{f(x+1)-fx}{x^n}$.

13-21. Cesàro. l. c., pag. 112-116.

23. Novi. *Analisi Algebrica,* 1863, pag. 47.

31-34. Genocchi-Peano. *Calcolo differenziale,* pag. 25.

32. $\lim \bmod \frac{f(x+1)-fx}{x^n} = \infty :$ » » $: \supset . \lim \bmod \frac{fx}{x^{n+1}} = \infty$.

33. $\lim \frac{f(x+1)}{fx} \, \varepsilon \, \mathrm{q} : a, b \, \varepsilon \, \mathrm{q} . \supset_{a,b} . \mathrm{l}', \mathrm{l}_1 \, f(a \neg b) \, \varepsilon \, \mathrm{Q} : \supset . \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{f(x+1)}{fx}$

34. $\lim \frac{f(x+1)}{fx} = \infty :$ » » $: \supset . \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \infty$.

35. $\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}$.

36. $\lim x^{\frac{1}{x}} = 1$.

37. $a \, \varepsilon \, 1 + \mathrm{Q} . \supset . \lim \frac{a^x}{x^n} = \infty$.

38. » $\lim \frac{\mathrm{Log}_a x}{x^n} = 0$.

39. » $\lim (\mathrm{Log}_a x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

40. $\lim \left\{ \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x \right\} = \frac{1}{2}$.

41. $a \, \varepsilon \, \mathrm{Q} . \supset . \lim x \left(a^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \log a$.

42. $a \, \varepsilon \, \mathrm{q} . \supset . \lim x \log \left(1 + \frac{a}{x}\right) = a$.

43. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{Q} . \supset . \lim x \left(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}\right) = \log \frac{a}{b}$.

44. $a \, \varepsilon \, \mathrm{q} . \supset . \lim \frac{(1 + ax)^n - a^n x^n}{x^{n-1}} = n a^{n-1}$.

45. $m, n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . a_0, a_1, \ldots, a_m, a_0', a_1', \ldots, a_n' \, \varepsilon \, \mathrm{q} . a_0, a_0' -\!= 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} m = n \\ m < n \\ m > n \end{array} \right. . \supset . \lim \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{a_0' x^n + a_1' x^{n-1} + \ldots + a_n'} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_0}{a_0'} \\ 0 \\ \infty \end{array} \right. .$$

R. Bettazzi.

35-45. Laska. *Sammlung von Formeln.* Braunschweig, 1888, vol. 1°, pag. 5.

VIII. — q'fN.

§ 1. Σ, Π.

$u, v \,\varepsilon\, \mathrm{qfN} \,.\, m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset :$

1 . $(\Sigma u)_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{r=1}^{r=n} u_r$. Def.

2. $(\Pi u)_n = u_1 u_2 \ldots u_n = \prod_{r=1}^{r=n} u_r$. Def.

3. $\Sigma u_n = (\Sigma u)_n \,.\, \Pi u_n = (\Pi u)_n$. Def.

3'. $(1 + u)_n = 1 + u_n \,.\, (u + v)_n = u_n + v_n \,.\, (u v)_n = u_n v_n$. Def.

4. $\overline{\Sigma} u_1 = u_1 \,.\, \overline{\Sigma} u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. [1 , 3]

5. $\overline{\Pi} u_1 = u_1 \,.\, \overline{\Pi} u_{n+1} = u_{n+1} / u_n$. [2 , 3]

6. $\Sigma^2 u_1 = u_1 \,.\, \Sigma^2 u_2 = 2u_1 + u_2$. [1 , 3]

6'. $\Sigma^2 u_n = n u_1 + (n-1) u_2 + (n-2) u_3 + \ldots + u_n$.

7. $\Sigma^m u_n = \binom{m+n-2}{m-1} u_1 + \binom{m+n-3}{m-1} u_2 + \ldots + \binom{m-1}{m-1} u_n$. [1 , 3]

8. $\Pi^m u_n = u_1^{\binom{m+n-2}{m-1}} u_2^{\binom{m+n-3}{m-1}} \ldots u_n^{\binom{m-1}{m-1}}$. [2 , 3]

9. $\overline{\Sigma}^m u_{m+n} = u_{m+n} - \binom{m}{1} u_{m+n-1} + \binom{m}{2} u_{m+n-2} - \ldots \pm \binom{m}{m} u_n$. [4]

10. $\overline{\Pi}^m u_{m+n} = u_{m+n} \, u_{m+n-1}^{-\binom{m}{1}} \, u_{m+n-2}^{\binom{m}{2}} \ldots u_n^{(-1)^m \binom{m}{m}}$. [5]

11. $u_{m+n} = u_m + n \overline{\Sigma} u_{m+1} + \binom{n}{2} \overline{\Sigma}^2 u_{m+2} + \ldots + \overline{\Sigma}^n u_{m+n}$. [4]

12. $u_{m+n} = u_m (\overline{\Pi} u_{m+1})^{\binom{n}{1}} (\overline{\Pi}^2 u_{m+2})^{\binom{n}{2}} \ldots (\overline{\Pi}^n u_{m+n})^{\binom{n}{n}}$. [5]

13. $\Sigma_n^{n+m} u_r = \binom{m+1}{1} u_n + \binom{m+1}{2} \overline{\Sigma} u_{n+1} + \binom{m+1}{3} \overline{\Sigma}^2 u_{n+2}$

$+ \ldots + \binom{m+1}{m+1} \overline{\Sigma}^m u_{n+m}$. [11]

14. $\Pi_n^{n+m} u_r = u_n^{\binom{m+1}{1}} (\overline{\Pi} u_{n+1})^{\binom{m+1}{2}} \ldots (\overline{\Pi}^m u_{n+m})^{\binom{m+1}{m+1}}$. [12]

15. $\Sigma (u + v)_n = \Sigma u_n + \Sigma v_n \,.\, \Pi (uv)_n = (\Pi u_n)(\Pi v_n)$. [1 , 2 , 3]

16. $\overline{\Sigma} (u + v)_n = \overline{\Sigma} u_n + \overline{\Sigma} v_n \,.\, \overline{\Pi} (uv)_n = (\overline{\Pi} u_n)(\overline{\Pi} v_n)$. [3 , 4 , 5]

17. $r \varepsilon \mathrm{N} . \supset_r . u_r = \binom{m+r}{r} : \supset . \overline{\Sigma}^m u_{r+m} = 1 .$ [9]

18. $a , b \varepsilon \mathrm{q} : r \varepsilon \mathrm{N} . \supset_r . \overline{\Sigma}^m u_{r+m} = a . \overline{\Sigma}^n v_{r+n} = b : \supset . \overline{\Sigma}^{m+n} (uv)_{r+m+n} = \binom{m+n}{n} ab .$

[Hp. P4 . $\supset . \overline{\Sigma} (uv)_{r+m+n} = u_{r+m+n} \overline{\Sigma} v_{r+m+n} + v_{r+m+n-1} \overline{\Sigma} u_{r+m+n}$: P16 . $\supset . \overline{\Sigma}^{m+n} (uv)_{r+m+n} = \overline{\Sigma}^{m+n-1} (u_{r+m+n} \overline{\Sigma} v_{r+m+n}) + \overline{\Sigma}^{m+n-1} (v_{r+m+n-1} \overline{\Sigma} u_{r+m+n})$. Pi . $\supset$. Ths.]

19. $\Pi (1+u)_n \Pi (1-u)_n = \Pi (1-u^2)_n .$

20. $v \varepsilon \mathrm{QfN} . \supset . (1+v_1)(1+v_2) \dots (1+v_m) > 1 + v_1 + v_2 + \dots + v_m .$

20'. $v \varepsilon \theta \mathrm{fN} . \supset . (1-v_1)(1-v_2) \dots (1-v_m) > 1 - (v_1 + v_2 + \dots + v_m) .$

21. $\dfrac{1}{\Pi (1+u)_n} = \Pi \left(1 - \dfrac{u}{1+u}\right)_n . \dfrac{1}{\Pi (1-u)_n} = \Pi \left(1 + \dfrac{u}{1-u}\right)_n .$

22. $u \varepsilon \theta \mathrm{f} \mathrm{Z}_n . \supset : \Pi (1+u)_n < \dfrac{1}{\Pi (1-u)_n} . \Pi (1-u)_n < \dfrac{1}{\Pi (1+u)_n} .$ [19]

23. $u \varepsilon \mathrm{Q} \mathrm{f} \mathrm{Z}_m . \supset . \Pi (1+u)_m < 1 + \dfrac{\Sigma u_m}{1} + \dfrac{(\Sigma u_m)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(\Sigma u_m)^m}{m!} .$

24. $u \varepsilon \theta \mathrm{fN} . r \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \Pi \left(\dfrac{1}{1-u}\right)_m > 1 + \dfrac{\Sigma u_m}{1} + \dfrac{(\Sigma u_m)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(\Sigma u_m)^r}{r!} .$

25. $u \varepsilon \theta \mathrm{f} \mathrm{Z}_m . m \varepsilon (2+\mathrm{N}) . \supset . (1-u_1) \dots (1-u_m) < 1 - (u_1 + \dots + u_m) + (u_1 u_2 + u_1 u_3 + \dots + u_{m-1} u_m) .$

26. $(1+u_1)(1+u_2) \dots (1+u_m) = 1 + u_1 + (1+u_1) u_2 + (1+u_1)(1+u_2) u_3 + \dots + (1+u_1)(1+u_2) \dots (1+u_{m-1}) u_m .$

27. $u_1 + u_2 + \dots + u_m = u_1 \left(1 + \dfrac{u_2}{u_1}\right) \left(1 + \dfrac{u_3}{u_1+u_2}\right) \dots \left(1 + \dfrac{u_m}{u_1 + u_2 + \dots + u_{m-1}}\right) .$

28. $1 = \dfrac{u_1}{1+u_1} + \dfrac{u_2}{(1+u_1)(1+u_2)} + \dots + \dfrac{u_n}{(1+u_1) \dots (1+u_n)} + \dfrac{1}{(1+u_1) \dots (1+u_n)} .$

28'. $a , b \varepsilon \mathrm{q} . (a+u_1)(a+u_2) \dots (a+u_{n+1})(a-b) -= 0 . \supset .$
$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a+u_1} + \frac{b+u_1}{(a+u_1)(a+u_2)} + \dots + \frac{(b+u_1) \dots (b+u_n)}{(a+u_1) \dots (a+u_{n+1})} + \frac{(b+u_1) \dots (b+u_n)(b+u_{n+1})}{(a+u_1) \dots (a+u_{n+1})(a-b)} .$$

---

§ 1. 23. Pringsheim, *Math. Ann.*, t. 33, a. 1889, pag. 142.
25. Cesàro. *Analisi algebrica*, a. 1894, pag. 106.
26, 27. Euler, *Novi comm. Acad. Petropolitanae*, t. V, pag. 76.
28'. Nicole. *Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris*, 1727, pag. 257.

29. $(u+v) \varepsilon (\pm Q) \, f Z_n . \supset . \sum_{r=2}^{r=n} \frac{u_r \, \Pi \, v_{r-1}}{\Pi(u+v)_r} = \frac{v_1}{u_1+v_1} - \frac{\Pi \, v_n}{\Pi . (u+v)_n}$. [28]

30. $\sum_{m+1}^{m+n} u = u_{m+1} - u_{m+2} + 2 (u_{m+2} - u_{m+3}) + \ldots + (n-1)(u_{m+n-1} - u_{m+n}) + n \, u_{m+n}$.

31. $\Pi_{m+1}^{m+n} u = u_{m+1}/u_{m+2} \, (u_{m+2}/u_{m+3})^2 \ldots (u_{m+n-1}/u_{m+n})^{n-1} \, u^n_{m+n}$.

32. $v_n u_n + (v_{n+1} - v_n) u_{n+1} + \ldots + (v_{n+m} - v_{n+m-1}) u_{n+m} = v_n (u_n - u_{n+1}) + \ldots + v_{n+m-1} (u_{n+m-1} - u_{n+m}) + v_{n+m} u_{n+m}$.

33. $v_n^{\,u_n} \, (v_{n+1}/v_n)^{u_{n+1}} \ldots (v_{n+m}/v_{n+m-1})^{u_{n+m}} = v_n^{\,u_n - u_{n+1}} \ldots v_{n+m-1}^{\,u_{n+m-1} - u_{n+m}} \, v_{n+m}^{\,u_{n+m}}$.

§ 2. $\Sigma \, u_\infty$.

$[\lim = \lim_{n=\infty}]$

$u, v \, \varepsilon \, q f N . m \, \varepsilon \, N . \supset :$

1. $\Sigma_1^\infty u = \lim \Sigma \, u_n$. 1'. $\Sigma_m^\infty u = \lim \Sigma_m^n u$. Def.

2. $u_1 + u_2 + \ldots = (\Sigma \, u)_\infty = \Sigma \, u_\infty = \Sigma_1^\infty u$. Def.

3. $\Sigma \, u_\infty \, \varepsilon \, q . \supset . \lim u_n = 0 . \lim \Sigma_n^{n+m} u = 0$. [§2 P2]

4. $\Sigma_1^\infty u \, \varepsilon \, q . = . \Sigma_m^\infty u \, \varepsilon \, q$. [§2 P2]

4'. » $= \infty . = .$ » $= \infty$. [»]

4''. $\Sigma_1^\infty u \, \varepsilon \, q : = : \varphi \, \varepsilon \, N f N . \supset_\varphi . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u = 0$. [»]

5. $\Sigma \, u_\infty \, \varepsilon \, q . h \, \varepsilon \, Q . \supset .\!\cdot . n \, \varepsilon \, N : r \, \varepsilon \, N . \supset_r . \bmod \Sigma_n^{n+r} u < h : - =_n \Lambda$. [§2 P2]

6. $h \, \varepsilon \, Q . \supset_h .\!\cdot . n \, \varepsilon \, N : r \, \varepsilon \, N . \supset_r . \bmod \Sigma_n^{n+r} u < h : - =_n \Lambda :: \supset . \Sigma \, u_\infty \, \varepsilon \, q$. [§2 P2]

7. $a \, \varepsilon \, q . u_1 + u_2 + \ldots \varepsilon \, q . \supset . a u_1 + a u_2 + \ldots = a (u_1 + u_2 + \ldots)$. [»]

8. $\Sigma \, u_\infty , \Sigma \, v_\infty \, \varepsilon q . \supset . (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots = (u_1 + u_2 + \ldots) + (v_1 + v_2 + \ldots)$. [§2 P2]

9. $\Sigma (u - v)_\infty \varepsilon \, q . \varphi \, \varepsilon \, N f N . \supset . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u = \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} v$. [»]

---

§ 2. 3, 4, 4', 8, 14. Cauchy. *Analyse algébrique*, a. 1821, pag. 125, 144, 147.

10. $\lim u_n = 0 \,.\, \supset \,.\, u_1 = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots$

11. $\lim u_n = \infty \,.\, \supset \,.\, (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \ldots = \infty \,.$

12. $\Sigma\, u_\infty \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, r \,\varepsilon\, \mathrm{N\,f\,N} \,.\, \supset \,.\, \Sigma_1^{r_1} u + \Sigma_{r_1+1}^{r_1+r_2} u + \Sigma_{r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3} u + \ldots = \Sigma\, u_\infty \,.$

13. $\Sigma\, u_\infty = \infty \,.$ » » $= \infty \,.$

14. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\, \mathrm{decr} \,.\, \lim u_n = 0 \,.\, \supset \,.\, u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cap (u_1 - \mathrm{Q}) \,.$

15. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q} : n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, \supset_n .\, u_{n+1} \,\varepsilon\, \mathrm{med}\,(u_n, a) : \supset \,.\, \lim u_n \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \Sigma_1^\infty (u_n - u_{n+1}) =$
$u_1 - \lim u_n \,.$

16. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \Sigma \bmod u_\infty \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \varphi \,\varepsilon\, (\mathrm{N\,f\,N})\, \mathrm{sim} \,.\, \supset \,.\, \Sigma_{n=1}^{n=\infty} u_{\varphi_n} = \Sigma_1^\infty u \,.$ [§2P4]

17. $\Sigma\, u_\infty \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \Sigma \bmod u_\infty = \infty \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset : \varphi \,\varepsilon\, (\mathrm{N\,f\,N})\, \mathrm{sim} \,.\, \Sigma_{n=1}^{n=\infty} u_{\varphi_n} =$
$a \,.\, - =_\varphi \Lambda \,.$

18. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, b > a \,.\, \varphi, \psi \,\varepsilon\, \mathrm{N\,f\,N} \,.\, \supset \therefore a = \lim (\Sigma\, u_{\varphi_n} - \Sigma\, v_n) \,.$
$b = \lim (\Sigma u_{\psi_n} - \Sigma v_n) : = : a = \lim (\Sigma u_{\varphi_n} - \Sigma v_n) \,.\, b - a = \lim \Sigma_{\varphi_n + 1}^{\psi_n} u \,.$

19. $u, v \,\varepsilon\, \theta\, \mathrm{f\,N} \,.\, a, b \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \frac{b}{a} > 1 \,.\, \varphi, \psi \,\varepsilon\, \mathrm{N\,f\,N} \,.\, \supset \therefore a = \lim \Pi\, (1 + u)_{\varphi_n}$
$\Pi\, (1 - v)_n \,.\, b = \lim \Pi\, (1 + u)_{\psi_n}\, \Pi\, (1 - v)_n : = : a = \lim \Pi\, (1 + u)_{\varphi_n}$
$\Pi\, (1 - v)_n \,.\, \frac{b}{a} = \lim \Pi_{\varphi_n + 1}^{\psi_n} (1 + u) \,.$

20. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \supset \,.\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n)} \,\varepsilon\, \theta \,.$ [§1 P28]

21. » $.\, \Sigma\, u_\infty = \infty \,.\, \supset \,.$ » $= 1 \,.$ [»]

22. $a \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \frac{1}{a} = \frac{1}{a + u_1} + \frac{u_1}{(a + u_1)(a + u_2)} + \frac{u_1 u_2}{(a + u_1)(a + u_2)(a + u_3)}$
$+ \ldots + \frac{u_1 u_2 \ldots u_{n-1}}{(a + u_1)(a + u_2) \ldots (a + u_n)} + \frac{u_1 u_2 \ldots u_n}{(a + u_1)(a + u_2) \ldots (a + u_n)\, a} \,.$

23. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \supset \,.\, \frac{1}{a + u_1} + \frac{u_1}{(a + u_1)(a + u_2)} + \frac{u_1 u_2}{(a + u_1)(a + u_2)(a + u_3)}$
$+ \ldots \,\varepsilon\, \frac{\theta}{a} \,.$ [§1 P29]

24. $u, v \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \supset \,.\, \frac{u_1}{u_1 + v_1} + \Sigma_{n=2}^{n=\infty} \frac{u_n\, \Pi\, v_{n-1}}{\Pi\, (u + v)_n} \,\varepsilon\, \left(1 - \frac{\theta}{\Sigma\, (u/v)_\infty}\right) \,.$ [§1 P29]

25. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \supset : \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \left(u_{n+1}\, \Pi\, (1 + u)_n\right) = \infty \,.\, = \,.\, \Sigma\, u_\infty = \infty \,.$ [§1 P26]

26. $u \,\varepsilon\, \theta\, \mathrm{f\,N} \,.\, \supset : \lim \Pi\, (1 + u)_n = \infty \,.\, = .\, \lim \Pi\, (1 - u)_n = 0 \,.$ [§1 P22]

---

17. RIEMANN'S. *Werke*, a. 1892, pag. 235.

27. $r \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{O}_r : \frac{u_{r+1}\, v_{r+1}}{u_r\, v_r} \varepsilon \mathrm{Q} . \lambda_r = v_r - v_{r+1} \frac{u_{r+1}}{u_r} : \mathrm{O} .$

$$\frac{1}{u_1 v_1} \Sigma_1^m \lambda_n u_n = 1 - e^{\Sigma_1^m \log\left(1 - \frac{\lambda_n}{v_n}\right)} = 1 - e^{\Sigma_1^m \log \frac{u_{n+1}\, v_{n+1}}{u_n\, v_n}} .$$

28. $a\, \varepsilon\, (\mathrm{Q\, f\, N})$ cres . $\lim a_n = \infty . p\, \varepsilon\, \mathrm{Q} : \mathrm{O} . \Sigma_1^\infty \frac{a_{n+1} - a_n}{e^{p\, a_{n+1}}}\, \varepsilon\, \mathrm{Q} .$

29. $a\, \varepsilon\, \mathrm{Q} . \mathrm{O} . \log \frac{a+m+1}{a+1} < \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + ... + \frac{1}{a+m} < \log \frac{a+m}{a} .$

30. $a\, \varepsilon\, \mathrm{q} - (-\mathrm{N}) . \mathrm{O} . \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + ... = \Sigma_1^\infty \frac{1}{a+n} = \infty .$

31. $a\, \varepsilon\, \mathrm{Q} . p\, \varepsilon\, \mathrm{Q} . \mathrm{O} . \frac{1}{(a+1)^{1+p}} + \frac{1}{(a+2)^{1+p}} + ...\, \varepsilon\, \mathrm{Q} \frown \left(\frac{1}{p\, a^p} - \mathrm{Q}\right) \frown$
$\left(\frac{1}{p\,(a+1)^p} + \mathrm{Q}\right) .$

32. $a , b , p\, \varepsilon\, \mathrm{Q} . \mathrm{O} . \frac{1}{a b^p} < p \left(\frac{1}{b^{1+p}} + \frac{1}{(b+a)^{1+p}} + \frac{1}{(b+2\,a)^{1+p}} + ...\right)$
$< \frac{1}{a b^p} + \frac{p}{b^{1+p}} .$

33. $a\, \varepsilon\, \mathrm{Q\, f\, N} . \lim a_n = \infty . \lim a_{n+1}/a_n = 1 . \mathrm{O} . \lim_{p=+0} p\, \Sigma_1^\infty \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}\, a_n^p} = 1 .$

34. » » » $= c > 1 .$ » $\frac{c-1}{c \log c} .$

35. » » » $= \infty .$ » $= 0 .$

36. $x\, \varepsilon\, \mathrm{q} - (-\mathrm{N}) . \mathrm{O} . \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + ...$

37. $x\, \varepsilon\, \mathrm{q} - (-\mathrm{N}) . p\, \varepsilon\, \mathrm{N} . \mathrm{O} . \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)...(x+n+p)} =$
$\frac{1}{p\,(x+1)(x+2)\,...\,(x+p)} .$

---

27. P. du Bois-Reymond. *Crelle's Journal*, t. 76, a. 1873, pag. 70.
28. Pringsheim. *Math. Ann.*, t. 35, a. 1889, pag. 329, 335.
30. Abel. *Œuvres*, a. MDCCCLXXXI, I, pag. 401.
32. Lejeune-Dirichlet. *Lezioni sulla teoria dei numeri*, tradotto da Faifofer, Venezia 1881, pag. 300; *Zahlentheorie*, a. 1894, pag. 301.
33-35. Pringsheim. *Math. Ann.*, t. 37. a. 1890, pag. 47.

38. $p \varepsilon N . \supset . \frac{1}{1(p+1)} + \frac{1}{2(p+2)} + ... + \frac{1}{n(p+n)} + ... =$
$\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p}\right)$.

39. $b, a \varepsilon q . a - \varepsilon (-N_0 b) . \supset . \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(a+nb)(a+(n+1)b)...(a+(n+m)b)}$
$= \frac{1}{mb} \frac{1}{a(a+b)...(a+(m-1)b)}$.

40. $b \varepsilon Q . a \varepsilon (b+Q) . \supset . \frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a+b} + \frac{2!\,b^2}{(a+b)(a+2b)} +$
$\frac{3!\,b^3}{(a+b)(a+2b)(a+3b)} + ...$ [§2 P21]

41. $a \varepsilon q . b \varepsilon Q . p \varepsilon N . \varphi \varepsilon N f N . \supset .$
$\lim \Sigma_{\nu=n}^{\nu=n+\varphi_n} \left(\frac{b}{(a+\nu b)\log(a+\nu b)...\log^{p-1}(a+\nu b)}\right.$
$\left. - \log^p(a+(\nu+1)b) + \log^p(a+\nu b)\right) = 0$.

42. $a \varepsilon q . b \varepsilon Q . p \varepsilon N . \log^p(a+mb) \varepsilon Q . \Sigma_{\nu=m}^{\nu=\infty}$
$\left(\frac{b}{(a+\nu b)\log(a+\nu b)...\log^{p-1}(a+\nu b)} - \log^p(a+(\nu+1)b) + \right.$
$\left.\log^p(a+\nu b)\right) = E_p . \supset : r \varepsilon (m+N) . \supset_r . \log^p(a+mb) + \Sigma_{\nu=m}^{\nu=r}$
$\frac{b}{(a+\nu b)\log(a+\nu b)...\log^{p-1}(a+\nu b)} - \log^p(a+rb) > E_p >$
$\log^p(a+mb) + \Sigma_{\nu=m}^{\nu=r} \frac{b}{(a+\nu b)\log(a+\nu b)...\log^{p-1}(a+\nu b)} -$
$\log^p(a+(r+1)b)$.

43. $\lim\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log n\right) \varepsilon Q$. [§2 P42]

44. $\lim\left(\frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + ... + \frac{1}{n\log n} - \log^2 n\right) \varepsilon Q$. [»]

---

39. $(m = 1)$. JOHANNIS BERNOULLI. *Opera omnia*, a. MDCCXLII, t. 4, pag. 7.

41, 42, 46-50. GIUDICE. Giornale di Battaglini, t. 28, a. 1890, pag. 290-292; t. 27, a. 1889, pag. 342-351.

45. $\lim\left(\frac{1}{3\log 3\log^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\log n\log^2 n}-\log^3 n\right)\varepsilon\, Q$. [§2 P42]

46. $a\,\varepsilon\, \mathrm{q\,f\,N} \,.\, \lim(a_n - a_{n-1})\,\varepsilon\, Q \,.\, \supset .\, \lim(a_n - a_{n-1}) = \lim(\log^m a_n - \log^m a_{n-1})\, a_n \log a_n \ldots \log^{m-1} a_n$.

47. $p\,\varepsilon\,(m+N)\,.\supset .\, \lim\left(\frac{1}{mn+1}+\frac{1}{mn+2}+\ldots+\frac{1}{pn}\right)=\log\frac{p}{m}$.

48. » $\lim\left(\frac{1}{n^m\log n^m}+\frac{1}{(n^m+1)\log(n^m+1)}+\ldots+\frac{1}{n^p\log n^p}\right)=\log\frac{p}{m}$.

49. $a\,, u\,\varepsilon\, q \,.\, u -\varepsilon\, (-N a) \,.\, k\,\varepsilon\, N \,.\supset .\, \Sigma_{n=1}^{n=m}\frac{1}{u+na}-\Sigma_{n=1}^{n=k}\frac{1}{u+na}+\Sigma_{m+1}^{2m}\frac{1}{u+na}-\Sigma_{k+1}^{2k}\frac{1}{u+na}+\ldots=\frac{1}{a}\log\frac{m}{k}$.

50. $k\,\varepsilon\, N \,.\supset .\, \Sigma_1^m\frac{1}{2n-1}-\Sigma_1^k\frac{1}{2n}+\Sigma_{m+1}^{2m}\frac{1}{2n-1}-\Sigma_{k+1}^{2k}\frac{1}{2n}+\Sigma_{2m+1}^{3m}\frac{1}{2n-1}-\Sigma_{2k+1}^{3k}\frac{1}{2n}+\ldots=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{m}{k}$.

§ 3. Q f N.

$u\,\varepsilon\, \mathrm{QfN} \,.\, m\,\varepsilon\, N \,.\supset :$

1. $\Sigma u\,\varepsilon\,(\mathrm{QfN})\,\mathrm{cres} \,.\, \Sigma u_\infty = \mathrm{l}'\,\Sigma u_N$. [§2 P2]
2. $\Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q \cup \iota\infty$. [»]
3. $a\,\varepsilon\, Q : n\,\varepsilon\, N \,.\supset_n .\, \Sigma u_n < a : \supset .\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q \,.\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\, \theta a$. [§3 P1]
4. $a\,\varepsilon\,\theta \cap -\iota 1 : n\,\varepsilon\, N \,.\supset_n .\, \sqrt[n]{u_n} < a : \supset .\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q \cap \left(\frac{1}{1-a} - Q\right)$.
5. $a\,\varepsilon\, Q : n\,\varepsilon\, N \,.\supset_n .\, u_n / u_{n+1} > 1+a : \supset .\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q \cap \left(u_1+\frac{u_1}{a}-Q\right)$.
6. $\Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q \,.\supset .\, 0\,\varepsilon\, \lim n u_n \,.\, 0 = \min\lim n u_n$.
7. $p\,\varepsilon\, Q \,.\, \infty -\varepsilon\, \lim n^{1+p} u_n \,.\supset .\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\, Q$.

---

§ 3. 4, 7, 14, 15, 40. CAUCHY. *Anal. Alg.*, pag. 130, 132, 133, 134, 137.
5, 6, 20, 35, 36, 48, 49. ABEL. *Oeuvres,* I, pag. 400; II, pag. 197, 198, 199, 201, 202.

8. $(v - u) \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \Sigma u_\infty = \infty \,.\, \supset .\, \Sigma v_\infty = \infty$. [§3 P1]

9. $a \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \left(\frac{v}{u} - a\right) \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \Sigma u_\infty = \infty \,.\supset .\, \Sigma v_\infty = \infty$.

10. $\Sigma u_\infty = \infty \,.\, v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} : n \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset_n .\, \frac{v_{n+1}}{v_n} \geqq \frac{u_{n+1}}{u_n} \,.\supset .\, \Sigma v_\infty = \infty$.

11. $v \varepsilon \mathrm{QfN} \,.\, \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} : n \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset_n .\, u_n \leqq v_n : \supset .\, \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. [§3 P1]

12. » » $. \infty - \varepsilon \lim u_n/v_n \,.\supset .$ » .

13. » » $: n \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset_n .\, u_{n+1}/u_n \leqq v_{n+1}/v_n \,.\supset .$ » .

14. $\max \lim u_n^{1/n} < 1 \,.\supset .\, \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$.

15. $\min \lim u_n^{1/n} > 1 \,.\supset .\, \Sigma u_\infty = \infty$.

15'. $n \varepsilon (m + \mathrm{N}) \,.\supset_n .\, u_n^{1/n} \geqq 1 : \supset .\, \Sigma u_\infty = \infty$.

16. $v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \min \lim \frac{v_n - v_{n+1}}{u_{n+1}} > 0 \,.\supset .\, \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$.

17. » $. \lim v_n = \infty \,.\, \min \lim u_{n+1} v_{n+1}/(v_{n+1} - v_n) > 0 .\supset . \Sigma u_\infty = \infty$.

18. $v \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cres}.\lim v_n = \infty . p \varepsilon \mathrm{Q} .\supset . \Sigma_1^\infty \frac{v_{n+1} - v_n}{v_{n+1}} = \infty \,.\, \Sigma_1^\infty \frac{v_{n+1} - v_n}{v_{n+1} v_n^p} \varepsilon \mathrm{Q}$.

19. $g \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{decr}.\lim g_n = 0 \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{g_n - g_{n+1}}{g_n^{1-p}} \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \Sigma_1^\infty$

$\frac{g_n - g_{n+1}}{g_n} = \infty$. [§3 P18]

20. $\Sigma u_\infty = \infty \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{(\Sigma u_n)^{1+p}} \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{\Sigma u_n} = \infty$. [»]

21. $p, \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{(\Sigma_n^\infty u)^{1-p}} \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{\Sigma_n^\infty u} = \infty$. [§3 P19]

22. $p, 1^1 u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{u_n}{(\Pi_1^{n-1}(1 + u))^p} \varepsilon \mathrm{Q}$.

23. $u \varepsilon \theta\,\mathrm{f\,N} \,.\, p \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset .\, \Sigma_1^\infty u_n (\Pi_1^{n-1}(1 - u))^p \varepsilon \mathrm{Q}$.

9, 10, 12, 13, 45, 46, 46'. BONNET. *Journal de Liouville,* VIII, a. 1843, pag. 73, 74, 95, 100.

16, 17, 19, 26, 27, 33, 34, 53, 53'. DINI. *Annali delle Università Toscane,* IX, a. 1867, pag. 43, 45, 46, 47, 61.

18, 22, 23. PRINGSHEIM. *Mathematische Annalen,* XXXV, a. 1889, pag. 230, 330, 334.

21, 50, 51. GIUDICE. *Giornale di Battaglini,* XXVIII, a. 1890, pag. 301; Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, IV, a. 1890, pag. 284.

24. $\Sigma u_\infty = \infty . \supset . \lim \frac{1}{\log \Sigma u_n}\left(1+\frac{u_2}{\Sigma u_2}+\ldots+\frac{u_n}{\Sigma u_n}\right) = \lim 1/\log \left(1+\frac{u_n}{\Sigma u_{n-1}}\right)^{\frac{\Sigma u_n}{u_n}}$. [§1 P27, §3 P4]

25. $\Sigma u_\infty = \infty . \lim \frac{u_n}{\Sigma u_{n-1}} = 0 . \supset . \lim \frac{1+\frac{u_2}{\Sigma u_2}+\ldots+\frac{u_n}{\Sigma u_n}}{\log \Sigma u_n} = 1$.

» $a \varepsilon Q$. » $= a$. » $a/(1+a)\log(1+a)$.

» » $=\infty$. » $=0$.

[§3 P24]

26. $\Sigma u_\infty = \infty . \supset . \Sigma_1^\infty \frac{u_{n+1}}{\Sigma u_n \log \Sigma u_n} = \infty . \Sigma_1^\infty \frac{u_{n+1}}{\Sigma u_n \log\Sigma u_n \log^2 \Sigma u_n} = \infty . \ldots$

27. » $p \varepsilon N . \supset . \Sigma_1^\infty u_{n+1} [\Sigma u_n . \log\Sigma u_n . \log^2 \Sigma u_n . \ldots \log^p \Sigma u_n] = \infty$. [§3 P25]

28. $r \varepsilon N . \log^r m \varepsilon Q . \supset . \Sigma_m^\infty \frac{1}{n\log n \log^2 n \ldots \log^r n} = \infty$. [§3 P27]

29. » » $. p \varepsilon Q . \supset . \Sigma_m^\infty \frac{1}{n \log n \ldots (\log^{r-1} n)(\log^r n)^{1+p}} \varepsilon Q$. [§3 P20, 25]

30. » $. \Sigma u_\infty \varepsilon Q . \supset . 0 \varepsilon \lim u_n\, n \log n \log^2 n \ldots \log^r n$. [§3 P9, 28]

31. » $. p \varepsilon Q . \infty - \varepsilon \lim u_n n \log n \log^2 n \ldots \log^{r-1} n (\log^r n)^{1+p} . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon Q$ [§3 P12, 29]

32. $\Sigma u_\infty = \infty . \supset : \varphi \varepsilon N f N . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u_n / [\Sigma u_n \log \Sigma u_n \ldots \log^n \Sigma u_n]$ $- \varepsilon 0 . -=_\varphi \Lambda$. [§2 P4 - §3 P27]

33. $\Sigma u_\infty = \infty . p \varepsilon Q . \supset : \varphi \varepsilon N f N . \supset_\varphi . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u_n/[\Sigma u_n (\log\Sigma u_n)^{1+p}]$ $= 0 . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u_n / [\Sigma u_n \log \Sigma u_n (\log^2 \Sigma u_n)^{1+p}] = 0$.

34. $\Sigma u_\infty = \infty . p \varepsilon Q . \supset : \varphi \varepsilon N f N . \supset_\varphi . \lim \Sigma_n^{n+\varphi_n} u_n / [\Sigma u_n \log \Sigma u_n \ldots \log^{m-1}$ $\Sigma u_n (\log^m \Sigma u_n)^{1+p}] = 0$.

35. $\varphi \varepsilon Q f N . \supset : v \varepsilon Q f N . \min \lim \varphi_n v_n = 0 . \Sigma v_\infty = \infty . -=_v \Lambda$.

---

24. Cesàro. *Analisi algebrica,* 1894, pag. 133.
28, 29, 47. Bertrand. *Journal de Liouville,* VII, a. 1842, p. 38, 43.
30-31. De Morgan. *Differential calculus,* a. 1839, pag. 323.

36. $\varphi \varepsilon \mathrm{Q} f \mathrm{N} . \lim \varphi_n = \infty . \supset : v \varepsilon \mathrm{Q} f \mathrm{N} . \max \lim \varphi_n v_n = \infty . \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$
$- =_v \Lambda .$

37. $v\varepsilon(\mathrm{Q}f\mathrm{N})\mathrm{cresc}.\lim v_n = \infty . p \varepsilon \mathrm{Q}. \max \lim \frac{v_{n+1}\, v_n^p}{v_{n+1} - v_n} u_n \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$
[§3 P12, 18]

38. » » $\min \lim \frac{v_n \log v_n \ldots \log^m v_n}{v_{n+1} - v_n} u_n . \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$
[§3 P9, 27]

39. » » $p \varepsilon \mathrm{Q}. \max \lim \frac{v_n \log v_n \ldots \log^{m-1} v_n (\log^m v_n)^{1+p}}{v_n - v_{n-1}}$
$u_n \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$ [§3 P12, 34]

40. $\max \lim (u_{n+1}/u_n) < 1 . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

41. $\min \lim (n u_n / u_{n+1} - n - 1) > 0 . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$
$\max \lim (\quad » \quad) < 0 . \supset . \quad » \quad = \infty .$

41'. $n \varepsilon (m + \mathrm{N}) . \supset_n . (n u_n / u_{n+1} - n - 1) \overline{\overline{<}} 0 : \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$

42. $v \varepsilon \mathrm{q} f \mathrm{N} : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . u_{n+1}/u_n = 1 - v_n/n : \mathrm{l}' v_\infty \leq 1 : \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$
$: \max \lim v_n < 1 : \supset . \quad »$
$: \mathrm{l}_1 v_\infty > 1 : \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$
$: \min \lim v_n > 1 : \supset . \quad »$

43. $a \varepsilon \mathrm{Q} . p \varepsilon \mathrm{Q}. v \varepsilon \mathrm{q} f \mathrm{N} . \infty - \varepsilon v_\infty : n \varepsilon \mathrm{N}. \supset_n . u_{n+1}/u_n = 1 + a/n + v_n/n^{1+p}$
$.\cdot. \supset : \lim u_n = \infty . \lim u_n / n^a \varepsilon \mathrm{Q} . \Sigma u_\infty = \infty .$
$\left[c_n = \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{v_n}{n^{1+p}}\right) \Big/ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a . \supset . \Pi c_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . u_{n+1}/u_n = c_n (n+1)^a / n^a \right]$

44. $a \varepsilon \mathrm{Q} . p \varepsilon \mathrm{Q}. v \varepsilon \mathrm{q} f \mathrm{N}. \infty - \varepsilon v_\infty : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . u_{n+1}/u_n = 1 - a/n + v_n/n^{1+p}$
$.\cdot. \supset : \lim u_n = 0 . \lim n^a u_n \varepsilon \mathrm{Q} : a \leq 1 . \supset . \Sigma u_\infty = \infty : a > 1 . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

45. $v \varepsilon \mathrm{q} f \mathrm{N} : n \varepsilon \mathrm{N}. \supset_n . u_{n+1}/u_n = 1 - 1/n - v_n/(n \log n) : \mathrm{l}' v_\infty \leq 1 : \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$
$: \max \lim v_n < 1 : \supset . \quad »$
$: \mathrm{l}_1 v_\infty > 1 : \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}.$
$: \min \lim v_n > 1 : \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}.$

46. $v \varepsilon \mathrm{q} f \mathrm{N} . p \varepsilon \mathrm{N} : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . u_{n+1}/u_n = 1 - 1/n - 1/(n \log n) - \ldots -$
$1/(n \log n \log^2 n \ldots \log^{p-1} n) - v_n / (n \log n \log^2 n \ldots \log^p n) :$
$\mathrm{l}' v_\infty \leq 1 : \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$
$\mathrm{l}_1 v_\infty > 1 : \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

41, 41', 52, 52'. KUMMER. *Crelle's Journal*, XIII, a. 1835, pag. 172, 173, 177.

42. RAABE-DUHAMEL. *Journal de Liouville*, IV, a. 1839, pag. 215; VI, a. 1840, pag. 85.

46'. $v \varepsilon \mathrm{q\,f\,N} . p \varepsilon \mathrm{N} : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . n\left(1 - u_n^{\frac{1}{n}}\right) = \log n + \ldots + \log^{p-1} n + v_n \log^p n .$

$\mathrm{l}' v_{\mathrm{N}} \overline{\overline{<}} 1 . \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$

$\mathrm{l}_1 v_{\mathrm{N}} > 1 . \supset : \quad » \quad \varepsilon \mathrm{Q} .$

47. $v \varepsilon \mathrm{qfN} . p \varepsilon \mathrm{N} : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . u_n / u_{n+1} = 1 + 1/n + 1/(n \log n) + \ldots + 1/(n \log n \log^2 n \ldots \log^{p-1} n) + v_n/(n \log n \log^2 n \ldots \log_p n) :$

$\mathrm{l}' v_{\mathrm{N}} \leqq 1 : \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$

$\mathrm{l}_1 v_{\mathrm{N}} > 1 : \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

48. $\min \lim \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{n u_n \log n \ldots \log^{m-1} n}\right)}{\log^{m+1} n} > 1 . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

49. $\max \lim \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{n u_n \log n \ldots \log^{m-1} n}\right)}{\log^{m+1} n} < 1 . \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$

50. $v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . \min \lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 0 . \Sigma v_\infty = \infty : - =_v \Lambda .$

51. » $\max \lim v_{n+1}/v_n = \infty . \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} : - =_v \Lambda .$

52. $v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . \min \lim (u_n v_n / v_{n+1} - u_{n+1}) > 0 . \supset . \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

52'. » $. \min \lim v_n u_n = 0 . \min \lim v_n u_n u_{n+1} / (u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}) > 0 . \supset . \Sigma u_\infty = \infty .$

53. » $. \Sigma_1^\infty \dfrac{1}{u} = \infty . \max \lim (u_n v_n / v_{n+1} - u_{n+1}) < 0 . \supset . \Sigma v_\infty = \infty .$

53'. » . » $: n \varepsilon (m + \mathrm{N}) . \supset_n . (u_n v_n / v_{n+1} - u_{n+1}) \overline{\overline{<}} 0 . \supset . \Sigma v_\infty = \infty .$

54. $v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} : n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \overline{\overline{<}} \dfrac{v_n}{1 + v_{n+1}} . \supset . \Sigma_1^\infty u \varepsilon \mathrm{Q}$. [§2 P24, §3 P13]

55. $\Sigma_1^\infty u \varepsilon \mathrm{Q} . \supset : v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \overline{\overline{<}} \dfrac{v_n}{1 + v_{n+1}} : - =_v \Lambda .$

56. $a , b \varepsilon \mathrm{q\,f\,Z}_m . n \varepsilon \mathrm{N} . \supset_n . \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{n^m + a_1 n^{m-1} + \ldots + a_m}{n^m + b_1 n^{m-1} + \ldots + b_m} .$

$a_1 - b_1 > 1 . \supset . \Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} .$

$» \quad \overline{\overline{<}} 1 . \supset . \quad » \quad = \infty .$

---

56. Gauss. *Werke*, III, a. 1866, pag. 139.

57. $u_n/u_{n+1} = \lambda_n^{(0)} . n\,(u_n/u_{n+1} - 1) = \lambda_n^{(1)} . \log n\,(\lambda_n^{(1)} - 1) = \lambda_n^{(2)} . \log^2 n$
$(\lambda_n^{(2)} - 1) = \lambda_n^{(3)} \dots \lim \lambda_n^{(0)} = \lim \lambda_n^{(1)} = \dots = \lim \lambda_n^{(r-1)} = 1 .$
$\min \lim \lambda_n^{(m)} > 1 . \supset . \Sigma u_\infty \,\varepsilon\, Q .$
$\max \lim \lambda_n^{(m)} < 1 . \supset .$ » $= \infty .$ [§3 P47]

58. $v \,\varepsilon\, Q\,f\,N . \Sigma_1^\infty u = \infty : r \,\varepsilon\, N . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} \leqq \left(1 + \dfrac{1}{v_r}\right) v_{r+1} . \supset . \Sigma_1^\infty v .$
$= \infty . \lim \Sigma_1^n v / \Sigma_1^n u = 0 .$ [§2 P25]

59. $v \,\varepsilon\, Q\,f\,N : r \,\varepsilon\, N . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} = \dfrac{v_{r+1}\,(v_r + 1)}{v_r} .$
$\lim u_n / v_n \,\varepsilon\, Q . \supset . \Sigma_1^\infty u \,\varepsilon\, Q .$
» $= \infty . \supset .$ » $= \infty .$ $\left[\dfrac{u_{r+1}}{v_{r+1}} - \dfrac{u_r}{v_r} = u_r .\right]$

60. $r \,\varepsilon\, N . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} = \dfrac{v_{r+1}\,(v_r + 1)}{v_r} : \supset . v \,\varepsilon\, Q\,f\,N . -= \Lambda .$

61. $v \varepsilon Q f N : r \,\varepsilon\, N . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} \leqq \dfrac{v_{r+1}\,(v_r + 1)}{v_r} : \max \lim \dfrac{u_n}{v_n} = \infty : \supset . \Sigma_1^\infty u = \infty .$

62. » » » » $\geqq$ » $\lim \dfrac{u_n}{v_n} \,\varepsilon\, Q : \supset .$ » $\varepsilon\, Q .$

63. $v \,\varepsilon\, Q\,f\,Z_{m+1} . a , b , (b - a) \,\varepsilon\, Q . \psi \,\varepsilon\, (a \,\bar{}\, b)\, f\,Z_m : r \,\varepsilon\, Z_m . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} =$
$\dfrac{v_{r+1}\,(\psi_r\, v_r + 1)}{v_r} : \supset . \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{u_{m+1}}{v_{m+1}} - \dfrac{u_1}{v_1}\right) < \Sigma_1^m u < \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{u_{m+1}}{v_{m+1}} - \dfrac{u_1}{v_1}\right) .$

64. $a , b , (b - a) \,\varepsilon\, Q . v \,\varepsilon\, Q\,f\,N . \psi \,\varepsilon\, (a \,\bar{}\, b)\, f\,N . \Sigma_1^\infty u \,\varepsilon\, Q : r \,\varepsilon\, N . \supset_r . \dfrac{u_{r+1}}{u_r} =$
$\dfrac{v_{r+1}\,(\psi_r\, v_r + 1)}{v_r} : \supset . \lim \dfrac{u_n}{v_n} \,\varepsilon\, Q .$
$\dfrac{1}{b}\left(\lim \dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{u_1}{v_1}\right) < \Sigma_1^\infty u < \dfrac{1}{a}\left(\lim \dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{u_1}{v_1}\right) .$

§ 4. (Q f N) decr.

1. $u , v \,\varepsilon\, (Q\,f\,N)$ decr $. \Sigma u_\infty \,\varepsilon\, Q . \Sigma v_\infty = \infty . \varphi \,\varepsilon\, (N\,f\,N)$ cresc $. h \,\varepsilon\, Q :$
$r \,\varepsilon\, N . \supset_r . u_{\varphi_r} / v_{\varphi_r} > h .\therefore \supset . \infty \,\varepsilon\, \lim (\varphi_{n+1} - \varphi_n) .$

---

§ 4. 1. GIUDICE. *Giornale Battaglini,* a. 1890, pag. 287.

2. $u \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . $\lambda \varepsilon (\mathrm{N\,f\,N})$ cresc . max lim $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} < 1$. $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. ɔ . $\Sigma_1^\infty \lambda_n u_{\lambda_n} \varepsilon \mathrm{Q}$.

3. $u \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . $\lambda \varepsilon (\mathrm{N\,f\,N})$ cresc . min lim $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} > 0$. $\Sigma u_\infty = \infty$. ɔ . $\Sigma_1^\infty \lambda_n u_{\lambda_n} = \infty$.

4. $u \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . $a \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ : $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. = . $\Sigma_1^\infty a^n u_{a^n} \varepsilon \mathrm{Q}$.

5. $v \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . $\Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. $u_1 = v_1 - v_2$. $u_2 = 2(v_2 - v_3)$. $u_3 = 3(v_3 - v_4)$. .... ɔ . $\Sigma v_\infty = \Sigma_1^\infty \frac{u_r}{r} + \Sigma_2^\infty \frac{u_r}{r} + \Sigma_3^\infty \frac{u_r}{r} + \ldots = \Sigma_1^\infty u$.

6. $u \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . max lim $nu_n > 0$. ɔ . $\Sigma u_\infty = \infty$. [§4 P4]

7. » . ɔ : $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. = . lim $nu_n = 0$. $\Sigma_1^\infty n(u_n - u_{n+1}) \varepsilon \mathrm{Q}$. [§1 P30 . §4 P6]

8. » . $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. ɔ . $\Sigma u_\infty = \Sigma_1^\infty n(u_n - u_{n+1})$. [»]

9. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N}$. $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q}$. $\frac{1}{\lambda}$, $\alpha\, u \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,N})$ decr . lim $\lambda_n = \infty$. max lim $\alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \varepsilon \mathrm{Q}$. ɔ . lim $\lambda_n \alpha_n u_n = 0$.
[Hp . ɔ . $\Sigma_1^\infty (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \alpha_n u_n \varepsilon \mathrm{Q}$. lim $\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+n}} = 0$. $(\lambda_{m+1} - \lambda_m) \alpha_{m+1} u_{m+1} + \ldots + (\lambda_{m+n} - \lambda_{m+n-1}) \alpha_{m+n} u_{m+n} > \lambda_{m+n} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+n}}\right) \alpha_{m+n} u_{m+n}$: §2 P3 . ɔ . Ths.]

10. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} : n \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ$_n$. $nu_n > (n+1) u_{n+1}$: max lim $nu_n \log n > 0$. ɔ . $\Sigma u_\infty = \infty$. [§4 P9 . §2 P46]

11. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} : n \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ$_n$. $nu_n \log n > (n+1) u_{n+1} \log (n+1)$: max lim $nu_n \log n \log^2 n > 0$. ɔ . $\Sigma u_\infty = \infty$. [»]

12. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} : n \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ$_n$. $nu_n \log n \log^2 n > (n+1) u_{n+1} \log (n+1) \log^2 (n+1)$: max lim $nu_n \log n \log^2 n \log^3 n > 0$. ɔ . $\Sigma u_\infty = \infty$. [»]

13. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N}$. $\Sigma u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} : n \varepsilon \mathrm{N}$. ɔ$_n$. $nu_n \log n \log^2 n \ldots \log^m n > (n+1) u_{n+1} \log (n+1) \ldots \log^m (n+1)$. ɔ . lim $nu_n \log n \log^2 n \ldots \log^{m+1} n = 0$. [»]

2, 3. Dini. *Annali Università Toscane,* a. 1867, pag. 78-80.
4. Cauchy. *Anal. Alg.*, pag. 135.

14. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cresc}\,.\, d \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N}\,.\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{d} = \infty \,.\, \max\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{d_{n+1} - d_n} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .$
$\Sigma_1^\infty \frac{1}{u} = \infty .$

15. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cres}\,.\, c \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,N}\,.\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{c} \,\varepsilon\, \mathrm{Q}\,.\, \min\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{c_{n+1} - c_n} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .$
$\Sigma_1^\infty \frac{1}{u} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} .$

16. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cresc}\,.\, \max\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{\log n \log^2 n \ldots \log^m n} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{u} = \infty .$

17. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cresc}\,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q}\,.\, \min\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{\log n \log^2 n \ldots \log^{m-1} n\, (\log^m n)^{1+p}}$
$\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{u} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} .$

18. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cresc}\,.\, \max\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{\log u_n \log^2 u_n \ldots \log^m u_n} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{u} = \infty .$

19. $u \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{cresc}\,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q}\,.\, \min\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{\log u_n \log^2 u_n \ldots \log^{m-1} u_n\, (\log^m u_n)^{1+p}}$
$\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \frac{1}{u} \,\varepsilon\, \mathrm{Q} .$

20. $\varphi, \frac{1}{g}, \frac{1}{h} \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,Q})\,\mathrm{decr}\,.\, (g - h) \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,Q}\,.\, \lim_{x=\infty} h_x = \infty \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q}\,.\, \min$
$\lim_{x=\infty} \frac{(g_{x+p} - g_x)\, \varphi(g_{x+p})}{(h_{x+p} - h_x)\, \varphi(h_x)} > 1 \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \varphi(n) = \infty .$

21. $\varphi, \frac{1}{g}, \frac{1}{h} \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,Q})\,\mathrm{decr}\,.\, (g - h) \,\varepsilon\, \mathrm{Q f Q}\,.\, \lim_{x=\infty} h_x = \infty \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{Q}\,.\, \max$
$\lim_{x=\infty} \frac{(g_{x+p} - g_x)\, \varphi(g_x)}{(h_{x+p} - h_x)\, \varphi(h_{x+p})} < 1 \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \varphi(n) \,\varepsilon\, \mathrm{Q} .$

22. $\varphi, \frac{1}{g} \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,Q})\,\mathrm{decr} : x \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_x .\, g_x > x : \lim_{p=+0} \frac{g_{x+p} - g_x}{p} = g'_x .$
$\lim \frac{g'_x\, \varphi(g_x)}{\varphi(x)} \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} \,.\, \bigcup .\, \Sigma_1^\infty \varphi(n) \begin{matrix} = \infty . \\ \varepsilon\, \mathrm{Q} . \end{matrix}$

14-21. Pringsheim. *Mathematische Annalen,* XXXV, pag. 381-392.
22, 24, 25. Ermakof. *Bulletin de Darboux,* a. 1871, pag. 250, 255.

23. $\varphi , \frac{1}{h} \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,Q})$ decr . $\lim_{x=\infty} h_x = \infty : x \varepsilon \mathrm{Q} . \supset_x . x > h_x : \lim_{p=+0}$

$\frac{h_{x+p} - h_x}{p} = h'_x$.

$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{h'_x \varphi(h_x)} \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} . \supset . \Sigma_1^\infty \varphi(n) \begin{matrix} = \infty \\ \varepsilon \mathrm{Q} \end{matrix} .$

24. $\varphi \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,Q})$ decr . $\lim \frac{e^n \varphi(e^n)}{\varphi(n)} \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} . \supset . \Sigma_1^\infty \varphi(n) \begin{matrix} = \infty \\ \varepsilon \mathrm{Q} \end{matrix} .$

25. $\varphi \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,Q})$ decr . $\lim \frac{n \varphi(n)}{\varphi(\log n)} \begin{matrix} > 1 \\ < 1 \end{matrix} . \supset . \Sigma_1^\infty \varphi(n) \begin{matrix} = \infty \\ \varepsilon \mathrm{Q} \end{matrix} .$

§ 5. Πu_∞.

$u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . \supset :$

1. $\Pi u_\infty = \Pi_1^\infty u = u_1 u_2 u_3 \ldots = \lim \Pi u_n$. [Def.]

2. $\Pi u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . = . \Sigma_1^\infty \log u \varepsilon \mathrm{q}$.

3. $u \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . \supset : \Pi u_\infty = \infty . = . \Sigma_1^\infty \log u = \infty . = . \Pi_1^\infty \frac{1}{u} = 0 . = . \Sigma_1^\infty$

$\log \frac{1}{u} = -\infty$.

4. $\Pi u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \lim u_n = 1$.

5. $v \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} . \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \Pi_1^\infty (1 + v_n) \varepsilon \mathrm{Q}$.

6. » » $= \infty . \supset .$ » $= \infty$.

7. $v \varepsilon \theta \mathrm{f\,N} . \Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . \supset . \Pi_1^\infty (1 - v_n) \varepsilon \mathrm{Q}$.

8. » $= \infty . \supset .$ » $= \theta$.

9. $v \varepsilon (-1 + \mathrm{Q}) \mathrm{f\,N} . \Sigma v_\infty , \Sigma v_\infty^2 \varepsilon \mathrm{q} . \supset . \Pi_1^\infty (1 + v_n) \varepsilon \mathrm{Q}$.

10. » $\Sigma v_\infty \varepsilon \mathrm{q} . \Sigma v^2_\infty = \infty . \supset .$ » $= 0$.

11. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset : \Pi u_\infty = 0 . = . \Pi_m^\infty u = 0$. [§5 P1]

12. $m \varepsilon \mathrm{N} . \supset : \Pi u_\infty \varepsilon \mathrm{Q} . = . \Pi_m^\infty u \varepsilon \mathrm{Q}$. [»]

13. $\Pi u_\infty \varepsilon \mathrm{q} . = . \varphi \varepsilon \mathrm{N\,f\,N} . \supset_\varphi . \lim \Pi_n^{n+\varphi n} u = 1$. [»]

---

§ 5. 2-10. Cauchy. *Analyse algébrique,* pag. 561, 562, 563.

14. $\varphi, u \, \varepsilon \, (1+Q) \, f N : n \, \varepsilon \, N . \supset_n . \varphi_n / \varphi_{n+1} \overline{\overline{>}} u_{n+1} : \supset . \Pi \, u_\infty \, \varepsilon \, Q ..$

15. » $. \lim \varphi_n = 1 .$ » » $(\varphi_n / \varphi_{n+1})^{\frac{1}{\varphi_n - 1}} \overline{\overline{<}} u_{n+1} : \supset .$ » $= \infty$.

16. $v \, \varepsilon \, (Q f N) \text{ decr} . \Pi \, v_\infty \, \varepsilon \, Q : n \, \varepsilon \, N . \supset_n . u_n = \left(\frac{v_n}{v_{n+1}}\right)^n : \supset . \Pi \, v_\infty = \Pi_1^\infty$

$u_r^{\frac{1}{r}} \, \Pi_2^\infty \, u_r^{\frac{1}{r}} \, \Pi_3^\infty \, u_r^{\frac{1}{r}} \ldots = \Pi \, u_\infty$.

17. $u \, \varepsilon \, (Q f N) \text{ decr} . \max \lim (1+u_n)^n > 1 . \supset . \Pi (1+u)_\infty = \infty$.

[§4 P6 . §5 P2]

18. $\alpha \, \varepsilon \, Q f N . \Pi (1+u)_\infty \, \varepsilon \, Q . \frac{1}{\lambda}, (1+u)^\alpha \, \varepsilon \, (Q f N) \text{ decr} . \lim \lambda_n = \infty$.

$\max \lim \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \, \varepsilon \, Q . \supset . \lim (1+u_n)^{\lambda_n \alpha_n} = 1$. [§4 P9 . §5 P2]

19. $a^2 < 1 . \supset . \Pi_1^\infty \, (1+a^n) = \Pi_1^\infty \, \frac{1}{1-a^{2n-1}}$.

20. $k \, \varepsilon \, (1+Q) . \supset . \Sigma_1^\infty \, \frac{1}{n^k} = \Pi_1^\infty \left(1 - \frac{1}{Np_n{}^k}\right)$.

§ 6. q′fN.

1. $\binom{q'}{q}$ [§ 1 . § 2, P1-13] $\binom{q'}{Q}$ [§ 5 P1, 4, 12, 13]
2. $u \, \varepsilon \, q'fN . \Sigma_1^\infty \bmod u \, \varepsilon \, Q . \supset . \Sigma \, u_\infty \, \varepsilon \, q'$.
3. $u \, \varepsilon \, q' f N . l' \bmod u_N \, \varepsilon \, Q . v \, \varepsilon \, Q f N . \Sigma \, v_\infty \, \varepsilon \, Q . \supset . \Sigma_1^\infty \, u_n v_n \, \varepsilon \, q'$.

[§2 P4 . §6 P1]

4. $u \, \varepsilon \, q'fN . \Sigma \bmod u_\infty \, \varepsilon \, Q . v \, \varepsilon \, q'fN . l' \bmod v_N \, \varepsilon \, Q . \supset . \Sigma_1^\infty u_n \, v_n \, \varepsilon \, q'$.

[»]

5. » $. \Sigma \, u_\infty \, \varepsilon \, q' . v \, \varepsilon \, (Q f N) \text{ dec} . \supset . \Sigma_1^\infty \, u_n \, v_n \, \varepsilon \, q'$.
6. » . » . » cres. $v_\infty = \infty . \supset .$ »

14, 15. Giudice. *Giornale Battaglini*, a. 1890, pag. 305, 306.

20. Euler. *Introductio in Analysin inf.*, I, a. 1748, pag. 225.

§ 6. 2, 4, 15, 18, 19. Cauchy. *Analyse Algébrique*, pag. 147, 274-277, 280, 281.

4. O. Bonnet. *Liouville Journal*, a. 1843, pag. 73.

5, 6, 8, 9. Abel. *Œuvres*, I, pag. 222. - Dirichlet. *Teoria dei numeri*, pag. 368. - Capelli-Garbieri. *Analisi algebrica*, a. 1886, pag. 190.

7. » . $\mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\,(\Sigma u)_N - = \infty \,.\, v\,\varepsilon\,(\mathrm{Q\,f\,N})\mathrm{dec.lim}\,v_n = 0 \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty u_n v_n\,\varepsilon\,\mathrm{q}'$.

8. » » $.\, v\,\varepsilon\,\mathrm{q'fN} \,.\, \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,(v_n - v_{n+1})\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.$
$\lim v_n = 0 \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty u_n v_n\,\varepsilon\,\mathrm{q}'$.

9. » $.\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, v\,\varepsilon\,\mathrm{q'fN} \,.\, \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,(v_n - v_{n+1})\,\varepsilon\,\mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty u_n v_n\,\varepsilon\,\mathrm{q}'$.
[§1 P32 . §2 P4 . §6 P1]

10. $u\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} \,.\, \Sigma u_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, \supset .\therefore \varphi\,\varepsilon\,(\mathrm{N\,f\,N})\,\mathrm{sim} \,.\, \supset_\varphi .\, \sum_{n=1}^{n=\infty} u_{\varphi_n} = \Sigma u_\infty : = : \Sigma_1^\infty$
$\mathrm{mod}\,u\,\varepsilon\,\mathrm{Q}$.

11. $u\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} \,.\, \mathrm{l}'\,\mathrm{mod}\,u_N\,\varepsilon\,\mathrm{Q} \,.\, v\,\varepsilon\,(\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{decr.lim}\,v_n = 0 \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,(u_n -$
$u_{n+1})\,v_n\,\varepsilon\,\mathrm{Q}_0$. [§1 P32]

12. $u\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} \,.\, \lim u_n\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, v\,\varepsilon\,\mathrm{q\,f\,N} \,.\, a\,\varepsilon\,\mathrm{q} : n\,\varepsilon\,\mathrm{N} \,.\, \supset_n .\, v_{n+1}\,\varepsilon\,\mathrm{med}\,(v_n\,, a) :$
$\supset .\, \Sigma\,\mathrm{mod}\,(u_n - u_{n+1})\,v_n\,\varepsilon\,\mathrm{Q}_0$. [§1 P32]

13. $u\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} \,.\, \mathrm{mod}\,u\,\varepsilon\,\mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \Pi u_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, \supset .\therefore \varphi\,\varepsilon\,(\mathrm{N\,f\,N})\,\mathrm{sim} \,.\, \supset_\varphi .\, \prod_{n=1}^{n=\infty} u_{\varphi_n} =$
$\Pi u_\infty : = : \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,(u - 1)\,\varepsilon\,\mathrm{Q}$.

14. $u\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} \,.\, \Sigma u_\infty\,, \Pi(1 + u)_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, \supset .\, \mathrm{mod}\,\Sigma u_\infty \leqq \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,u \,.\, \mathrm{mod}\,\Pi$
$(1 + u)_\infty = \Pi_1^\infty \mathrm{mod}\,(1 + u)$.

$u\,, v\,\varepsilon\,\mathrm{q'\,f\,N} : n\,\varepsilon\,\mathrm{N} \,.\, \supset_n .\, w_n = \sum_{m=1}^{m=n} u_m v_{n-m+1} : \supset$

15. $\Sigma\,\mathrm{mod}\,u_\infty\,, \Sigma\,\mathrm{mod}\,v_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{Q} \,.\, \supset .\, \Sigma w_\infty = (\Sigma u_\infty)(\Sigma v_\infty)$.
16. $\Sigma u_\infty, \Sigma v_\infty, \Sigma w_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, \supset$. »
17. $\Sigma\,\mathrm{mod}\,u_\infty\,, \Sigma v_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,.\, \supset$. »
18. $u\,, v\,\varepsilon\,\mathrm{q\,f\,N} \,.\, \supset : \Sigma_1^\infty (u_n + \mathrm{i}\,v_n)\,\varepsilon\,\mathrm{q}' \,. = .\, \Sigma u_\infty\,, \Sigma v_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q}$.
19. » $.\, \Sigma u_\infty\,, \Sigma v_\infty\,\varepsilon\,\mathrm{q} \,.\, \supset .\, \Sigma_1^\infty (u_n + \mathrm{i}\,v_n) = \Sigma u_\infty + \mathrm{i}\,\Sigma v_\infty$.
20. » $: n\,\varepsilon\,\mathrm{N} \,.\, \supset_n .\, u_n u_{n+1}\,, v_n v_{n+1}\,\varepsilon\,\mathrm{Q} : \supset : \Pi_1^\infty (1 + u_n + \mathrm{i}\,v_n)$
$\varepsilon\,\mathrm{q}' \,. = .\, \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\,(u_n + \mathrm{i}\,v_n)\,\varepsilon\,\mathrm{Q}$.

---

10. DIRICHLET. *Mathem. Abhandl. der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* a. 1837, pag. 48.

13. DINI. *Annali di Matematica,* II, a. 1868-69, pag. 35.

16. ABEL. *Œuvres,* I, pag. 226. - CESÀRO. *Bulletin Darboux,* a. 1890, pag. 114.

17. MERTENS. *Crelle's Journal,* t. 79, a. 1875, pag. 182.

20. PRINGSHEIM. *Mathematische Annalen,* XXXIII, a. 1889, p. 139.

21. $a \varepsilon q' . \mathrm{mod}\, a < 1 . \supset . (1 + 2 \Sigma_1^\infty a^{4n^2}) \Sigma_1^\infty a^{(2n-1)^2} = \frac{a}{1-a^2} - \frac{a^3}{1-a^6}$

$+ \frac{a^5}{1-a^{10}} - \frac{a^7}{1-a^{14}} + \ldots$

22. $\psi \varepsilon q' f N . \Sigma_1^\infty \mathrm{mod}\, \psi(n) \varepsilon Q . \psi(1) = 1 : n, n' \varepsilon N . \supset_{n, n'} . \psi(n) \psi(n')$

$= \psi(n n') : : \supset . \Pi_1^\infty \frac{1}{1-\psi(Np_n)} = \Sigma_1^\infty \psi(n) .$

F. Giudice.

21, 22. Dirichlet. *Teoria dei numeri,* versione italiana Faifofer, pag. 225, 336.

IX.

§ 1. - G , alg , conj , norm .

1. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{G}_n = \overline{f \varepsilon} [a_0 , a_1 , \ldots a_n \varepsilon \mathrm{n} . a_0 > 0 . \mathrm{D}(a_0 , a_1 , \ldots a_n) = 1 .$
$f = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_m) \overline{x} . -=_{a_0 , a_1 , \ldots a_n} \Lambda] .$ [def.]
2. $\mathrm{G} = \overline{f \varepsilon} (n \varepsilon \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}_n . -=_n \Lambda) .$ [def.]
3. $\mathrm{alg} = \mathrm{q}' \frown \overline{x \varepsilon} (f \varepsilon \mathrm{G} . fx = 0 . -=_f \Lambda) .$ [def.]
4. $x \varepsilon \mathrm{q}' . n \varepsilon \mathrm{N} . a_0 , a_1 , \ldots a_n \varepsilon \mathrm{r} . a_0 -= 0 . a_1 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots$
$+ a_n = 0 . \supset . x \varepsilon \mathrm{alg} .$
5. $f , g \varepsilon \mathrm{G} . \supset . f \times g = [(fx) \times (gx)] \overline{x} .$ [def.]
6. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{G}_n \,\mathrm{irr} = \mathrm{G}_n - (\mathrm{G} \times \mathrm{G}) .$ [def.]
7. $\mathrm{G\,irr} = \mathrm{G} - (\mathrm{G} \times \mathrm{G}) .$ [def.]
8. $x \varepsilon \mathrm{alg} . \supset : f \varepsilon \mathrm{G\,irr} . fx = 0 . -=_f \Lambda .$
9. $x \varepsilon \mathrm{alg} . f , g \varepsilon \mathrm{G\,irr} . fx = 0 . gx = 0 . \supset . f = g .$
10. $n \varepsilon \mathrm{N} . \supset . \mathrm{alg}_n = \mathrm{alg} \frown \overline{x \varepsilon} (f \varepsilon \mathrm{G}_n \,\mathrm{irr} . fx = 0 . -=_f \Lambda) .$ [def.]
11. $\mathrm{alg}_1 = \mathrm{r} .$
12. $x \varepsilon \mathrm{alg}_n . p \varepsilon \mathrm{N} . f \varepsilon \mathrm{G}_p . fx = 0 . \supset . p \geq n .$
13. $n \varepsilon \mathrm{N} . a_0 , a_1 , \ldots a_n \varepsilon \mathrm{q}' . \supset . \mathrm{grad} [(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) \overline{x}] = n .$ [def.]
14. $x \varepsilon \mathrm{alg}_n . f \varepsilon \mathrm{G} . fx = 0 . \supset . \mathrm{grad}\, f \geq n .$
15. $x \varepsilon \mathrm{alg} . \supset . \mathrm{conj}\, x = \mathrm{q}' \frown \overline{y \varepsilon} (f \varepsilon \mathrm{G\,irr} . fx = 0 . fy = 0 . -=_f \Lambda) .$ [def.]
16. $x \varepsilon \mathrm{alg} . \supset . x \varepsilon \mathrm{conj}\, x .$
17. $n \varepsilon \mathrm{N} . x \varepsilon \mathrm{alg}_n . \supset . \mathrm{num\,conj}\, x = n .$
18. $x \varepsilon \mathrm{alg} . \supset . \mathrm{norm}\, x = \Pi\, \mathrm{conj}\, x .$ [def.]
19. $n \varepsilon \mathrm{N} . a_0 , a_1 , \ldots a_n \varepsilon \mathrm{q}' . \supset . \mathrm{coeff}_0 [(a_0 x^n + \ldots + a_n) \overline{x}] = a_0$
$\mathrm{coeff}_n [(a_0 x^n + \ldots + a_n) \overline{x}] = a_n .$ [def.]
» » $. r \varepsilon \mathrm{Z}_n . \supset . \mathrm{coeff}_r [(a_0 x^n + \ldots + a_r x^{n-r} + \ldots + a_n) \overline{x}] = a_r .$
20. $n \varepsilon \mathrm{N} . x \varepsilon \mathrm{alg}_n . f \varepsilon \mathrm{G}_n \mathrm{irr} . fx = 0 . \supset . \mathrm{norm}\, x = (-1)^n \mathrm{coeff}_n f / \mathrm{coeff}_0 f .$
21. $x \varepsilon \mathrm{alg} . \supset . / x \varepsilon \mathrm{alg} .$
22. $x , y \varepsilon \mathrm{alg} . \supset : x + y , x - y , xy \varepsilon \mathrm{alg} : x , y \varepsilon \mathrm{alg} . y -= 0 . \supset . x/y \varepsilon \mathrm{alg} .$
23. $n \varepsilon \mathrm{N} . a_0 , a_1 , \ldots a_n \varepsilon \mathrm{alg} . a_0 -= 0 . x \varepsilon \mathrm{q}' . a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 . \supset . x \varepsilon \mathrm{alg} .$

---

§ 1.

3. DEDEKIND (DIRICHLET-DEDEKIND, *Vorlesungen über Zahlentheorie,* 4e Aufl. Braunschweig 1894), p. 524.
4. DEDEKIND, p. 524.
10. » p. 492.
23 » p. 492.

§ 2. - A, U.

1. $\mathrm{A} = \mathrm{alg} \frown \overline{x\,\varepsilon}\,(f\,\varepsilon\,\mathrm{G\ irr}\,.\,\mathrm{coeff}_0\, f = 1\,.\,fx = 0\,.\,-=_f \Lambda)\,.$ [def.]
2. $\mathrm{r} \frown \mathrm{A} = \mathrm{n}\,.$
3. $x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,y\,\varepsilon\,\mathrm{conj}\,x\,.\supset.\,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.$
4. $x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\supset.\,x+y\,, x-y\,, xy\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.$
5. $n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,a_1, a_2, \ldots a_n\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{q}'\,.\,x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0\,.\supset.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.$
6. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg}\,.\supset:\,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,xy\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,-=_y \Lambda\,.$
7. $\mathrm{U} = \overline{x\,\varepsilon}\,(x\,, /x\,\varepsilon\,\mathrm{A})\,.$ [def.]
8. $x\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.\supset.\,\mathrm{norm}\,x = \pm 1\,.$
9. $x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,\mathrm{norm}\,x = \pm 1\,.\supset.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
10. $n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,x^n = 1\,.\supset.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
11. $x, y\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.\supset.\,xy\,, x/y\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
12. $n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,a_0\,, a_n\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.\,a_1, a_2, \ldots a_{n-1}\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{q}'\,.\,a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots$
    $+ a_n = 0\,.\supset.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
13. $\mathrm{num}\,\mathrm{U}\,\varepsilon\,\infty\,.$

§ 3. - π.

$x, y, z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\supset:$

1. $x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\supset.\,x+y\,, x-y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.$
2. $x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y\,, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\supset.\,x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.$
3. $x\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y\,.\,y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times x\,.\supset.\,x, y\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
4. $x\,\pi\,y\,.=:\,u, v\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,ux + vy = 1\,.\,-=_{u,v} \Lambda\,.$ [def.]
5. $x\,\pi\,y\,.=.\,y\,\pi\,x\,.$
6. $x\,\pi\,y\,.\,x\,\pi\,z\,.\supset.\,x\,\pi\,yz\,.$
7. $m\,, n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,x_1, x_2, \ldots x_m\,, y_1, \ldots y_n\,\varepsilon\,\mathrm{A}:\,i\,\varepsilon\,\mathrm{Z}_m\,.\,j\,\varepsilon\,\mathrm{Z}_n\,.\supset_{i,j}.\,x_i\,\pi\,y_j:\supset.$
    $x_1 x_2 \ldots x_m\,\pi\,y_1 y_2 \ldots y_n\,.$
8. $x\,\pi\,y\,.\,xz\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y\,.\supset.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y\,.$
9. $x\,\pi\,y\,.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times x\,.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times y\,.\supset.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times xy\,.$
10. $x\,\pi\,y\,.\,x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\supset.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{U}\,.$
11. $x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\supset:\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times x + \mathrm{A}\times y\,.\,-=_z \Lambda\,.$
12. $x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}:\,z\,\varepsilon\,\mathrm{A}\,.\,x, y\,\varepsilon\,\mathrm{A}\times z\,.\supset_z.\,z\,\varepsilon\,\mathrm{U}:\supset.\,x\,\pi\,y\,.$

---

§ 2.

1, 2. DEDEKIND, p. 524.
4, 5. » p. 528.
6. » p. 525.
7. » p. 532.
10-13. DEDEKIND, p. 532.

§ 3.

1-3. DEDEKIND, p. 532.
4 e seg. » p. 533 e seg.

§ 4. - Ω, alg‘, Ω‘, Ω norm.

1. $\Omega = \mathrm{K\,alg} \cap \overline{k\,\varepsilon}\,(x,y\,\varepsilon\,k . \supset_{x,y} . x \pm y, xy\,\varepsilon\,k : x,y\,\varepsilon\,k . y -= 0 . \supset_{x,y} . x/y\,\varepsilon\,k)$. [def.]
2. $\mathrm{r}\,\varepsilon\,\Omega$.
2'. $\mathrm{r} + \mathrm{i\,r}\,\varepsilon\,\Omega$.
2''. $\mathrm{alg}, \mathrm{alg} \cap \mathrm{q}\,\varepsilon\,\Omega$.
3. $h\,\varepsilon\,\Omega . h - \iota 0 -= \Lambda . \supset . \mathrm{r} \supset h$.
4. $u\,\varepsilon\,\mathrm{K}\Omega . \supset . \cap‘ u\,\varepsilon\,\Omega$.
5. $h\,\varepsilon\,\Omega . \supset . \mathrm{alg}‘ h = \mathrm{q}' \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(n\,\varepsilon\,\mathrm{N} . a_0, a_1, \ldots a_n\,\varepsilon\,h . a_0 -= 0 .$
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 . -=_{n, a_0, \ldots a_n} \Lambda)$. [def.]
6. $\mathrm{alg} = \mathrm{alg}‘ \mathrm{r}$.
6'. $\mathrm{alg}‘ \mathrm{alg} = \mathrm{alg}$.
7. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \supset . \Omega‘ x = \overline{y\,\varepsilon}\,(f, g\,\varepsilon\,\mathrm{G} . y = \dfrac{fx}{gx} . -=_{f,g} \Lambda)$. [def.]
8. $k\,\varepsilon\,\mathrm{K\,alg} . \supset . \Omega‘ k = \cap‘ \overline{h\,\varepsilon}\,(h\,\varepsilon\,\Omega . k \supset h)$. [def.]
9. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \supset . \Omega‘ x = \Omega‘ (\iota x)$.
10. $n\,\varepsilon\,\mathrm{N} . x\,\varepsilon\,\mathrm{alg}_n . y\,\varepsilon\,\Omega‘ x . \supset : r_1, r_2, \ldots r_n\,\varepsilon\,\mathrm{r} .$
$y = r_1 x^{n-1} + r_2 x^{n-2} + \ldots + r_n . -=_{r_1, \ldots r_n} \Lambda$.

$n, m\,\varepsilon\,\mathrm{N} . x\,\varepsilon\,\mathrm{alg}_n . y\,\varepsilon\,\Omega‘ x . y\,\varepsilon\,\mathrm{alg}_m . \supset :$
11. $m \leq n$.
12. $m = n . \supset . \Omega‘ y = \Omega‘ x$.
13. $m < n . \supset . \Omega‘ y \supset \Omega‘ x$.
14. $m < n . \supset . n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,m$.
15. $m < n . n\,\varepsilon\,\mathrm{Np} . \supset . y\,\varepsilon\,\mathrm{r}$.
16. $k\,\varepsilon\,\mathrm{K\,alg} . \supset . \mathrm{conj}\,k = \overline{y\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\,k . y\,\varepsilon\,\mathrm{conj}\,x . -=_x \Lambda)$. [def.]
17. $k\,\varepsilon\,\mathrm{K\,alg} . \supset . k \supset \mathrm{conj}\,k$.
18. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \supset . \mathrm{conj}'\,\Omega‘ x = \overline{h\,\varepsilon}\,(y\,\varepsilon\,\mathrm{conj}\,x . h = \Omega‘ y . -=_y \Lambda)$. [def.]
19. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \supset . \Omega‘ x\,\varepsilon\,\mathrm{conj}'\,\Omega‘ x$.
20. $n\,\varepsilon\,\mathrm{N} . x\,\varepsilon\,\mathrm{alg}_n . \supset . \mathrm{num\,conj}'\,\Omega‘ x \leq n$.
21. $k\,\varepsilon\,\Omega . \supset . \mathrm{norm}\,k = \Omega‘ \mathrm{conj}\,k$. [def.]
22. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \supset . \mathrm{norm}\,\Omega‘ x = \Omega‘ \mathrm{conj}\,x$.
23. $\Omega\,\mathrm{norm} = \Omega \cap \overline{k\,\varepsilon}\,(\Omega‘ \mathrm{conj}\,k = k)$. [def.]
24. $x\,\varepsilon\,\mathrm{alg} . \mathrm{norm}\,\Omega‘ x = \Omega‘ x . \supset . \Omega‘ x\,\varepsilon\,\Omega\,\mathrm{norm}$.

---

§ 4.

1. Dedekind, p. 452.
2. » p. 453.
2'. » p. 435 e 453.
2''. Dedekind, p. 492.
3. » p. 453.
4. » p. 454.
5. » p. 467.

§ 5. - B.

1. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . h \, \varepsilon \, \Omega . \supset . \mathrm{B}\, h = \overline{(x_1 , x_2 , \ldots x_n) \, \varepsilon} \, (h = \mathrm{r}\, x_1 + \mathrm{r}\, x_2 + \ldots + \mathrm{r}\, x_n)$. [def.]
2. $h \, \varepsilon \, \Omega . \mathrm{B}\, h = \Lambda : - =_h \Lambda$.
3. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . h \, \varepsilon \, \Omega . x \, \varepsilon \, (\mathrm{alg \, f \, Z}_n) . \supset .\because x \, \varepsilon \, \mathrm{irr}' \, h . = : a_1 , a_2 , \ldots a_n \, \varepsilon \, h .$
   $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0 . \supset_{a_1 . a_2 \ldots a_n} . a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0)$. [def.]

3'. $h , k \, \varepsilon \, \Omega . h \supset k . x \, \varepsilon \, (\mathrm{alg \, f \, Z}_n) \frown \mathrm{irr}' \, k . \supset . x \, \varepsilon \, \mathrm{irr}' \, h$.

4. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \supset . \Omega_n = \Omega \frown \overline{h \, \varepsilon} \, [x \, \varepsilon \, (\mathrm{alg \, f \, Z}_n) \frown \mathrm{irr}' \, \mathrm{r} . h = \mathrm{r}\, x_1 + \mathrm{r}\, x_2 + \ldots + \mathrm{r}\, x_n .$
   $- =_x \Lambda]$. [def.]
5. $k , n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . h \, \varepsilon \, \Omega_n . (x_1 , x_2 , \ldots x_k) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, h . \supset . k \geqq n$.
6. $\mathrm{r} \, \varepsilon \, \Omega_1$.
7. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . \mathrm{alg} \, \varepsilon \, \Omega_n : =_n \Lambda$.
8. $\mathrm{B \, alg} = \Lambda$.
9. $x \, \varepsilon \, (\mathrm{alg \, f \, Z}_n) \frown \mathrm{irr}' \, \mathrm{r} . h = \mathrm{r}\, x_1 + \mathrm{r}\, x_2 + \ldots + \mathrm{r}\, x_n . \supset .\because$
   $h \, \varepsilon \, \Omega . = : i , k \, \varepsilon \, \mathrm{Z}_n . \supset_{i , k} . x_i x_k \, \varepsilon \, h :$
10. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . x \, \varepsilon \, \mathrm{alg}_n . \supset . \Omega' x \, \varepsilon \, \Omega_n$.
11. » » $. \supset . \Omega' x = \mathrm{r} + \mathrm{r}\, x + \mathrm{r}\, x^2 + \ldots + \mathrm{r}\, x^{n-1}$.
12. » » $. \supset . (1 , x , x^2 , \ldots x^{n-1}) \, \varepsilon \, \mathrm{irr}' \, \mathrm{r}$.
13. $n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . h \, \varepsilon \, \Omega_n . \supset . x \, \varepsilon \, \mathrm{alg}_n . h = \Omega' x . - =_x \Lambda$.

$n \, \varepsilon \, \mathrm{N} . x \, \varepsilon \, \mathrm{alg}_n . \supset .\therefore$

14. $(y_1 , y_2 , \ldots y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x) . a_1 , a_2 , \ldots a_n \, \varepsilon \, \mathrm{r} - = 0 . \supset . (a_1 y_1 , a_2 y_2 , \ldots$
    $a_n y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x)$.
15. $(y_1 , y_2 , \ldots y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x) . \supset : a_1 , a_2 , \ldots a_n \, \varepsilon \, \mathrm{r} . a_1 y_1 , a_2 y_2 , \ldots a_n y_n \, \varepsilon \, \mathrm{A} .$
    $- =_{a_1 , \ldots a_n} \Lambda$.
16. $(x_1 , x_2 , \ldots x_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x) . a \, \varepsilon \, \mathrm{r \, f} \, (\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) . \mathrm{Det} \, a - = 0 : i \, \varepsilon \, \mathrm{Z}_n . \supset_i .$
    $y_i = \sum_k a_{ik} x_k : \supset . (y_1 , y_2 , \ldots y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x)$.
17. $(x_1 , x_2 , \ldots x_n) , (y_1 , y_2 , \ldots y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x) . \supset .\therefore a \, \varepsilon \, \mathrm{r \, f} \, (\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) .$
    $\mathrm{Det} \, a - = 0 : i \, \varepsilon \, \mathrm{Z}_n . \supset_i . y_i = \sum_k a_{ik} x_k : - =_a \Lambda$.
18. $(y_1 , y_2 , \ldots y_n) \, \varepsilon \, \mathrm{B}\, (\Omega' x) . a \, \varepsilon \, \mathrm{r \, f} \, (\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) : i \, \varepsilon \, \mathrm{Z}_n . \supset_i . x y_i = \sum_k a_{ik} y_k :$
    $\supset . \mathrm{norm} \, x = \pm \mathrm{Det} \, a$.

---

§ 5.

3, 3'. Dedekind, p. 466.

4. Dedekind, p. 471.
7. » p. 492.
9. » p. 470.
13. » p. 493.

§ 6.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x_1 \varepsilon \mathrm{alg}_n \,.\, x \varepsilon (\mathrm{conj}\, x_1) \mathrm{f} \mathrm{Z}_n \mathrm{Sim} \,.$

$y \varepsilon \mathrm{alg}\, \mathrm{f}(\mathrm{Z}_n, \mathrm{Z}_n) : i, k \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\!\supset_{i,k} .\, y_{ik} \varepsilon \mathrm{conj}\, y_{i1} \cap \Omega' x_k : \supset .\because$

1. $\mathrm{Det}^2 y \varepsilon \mathrm{r} \,.$
2. $i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset_i .\, y_{i1} \varepsilon \mathrm{A} : \supset .\, \mathrm{Det}^2 y \varepsilon \mathrm{n} \,.$
3. $\mathrm{Det}\, y = 0 \,.\, \supset : i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset .\, (y_{1i}, y_{2i}, \ldots y_{ni}) -\varepsilon \mathrm{B}(\Omega' x_i) \,.$
4. $\mathrm{Det}\, y -= 0 \,.\, \supset : i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset .\, (y_{1i}, y_{2i}, \ldots y_{ni}) \varepsilon \mathrm{B}(\Omega' x_i) \,.$
5. $a \varepsilon (\mathrm{r} \cap -\mathrm{n}) \mathrm{f} \mathrm{Z}_n : i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset_i .\, y_{i1} \varepsilon \mathrm{A} : a_1 y_{11} + a_2 y_{21} + \ldots + a_n y_{n1} \varepsilon \mathrm{A} :$
   $\supset : p, q \varepsilon \mathrm{n} \,.\, \mathrm{Det}^2 y = p^2 \times q \,.\, -=_{p,q} \Lambda \,.$
6. $\mathrm{Det}\, y -= 0 : i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset_i .\, y_{i1} \varepsilon \mathrm{A} : a \varepsilon \mathrm{r} \mathrm{f} \mathrm{Z}_n \,.\, a_1 y_{11} + \ldots + a_n y_{n1} \varepsilon \mathrm{A} \,.\, \supset \,.$
   $a_1, \ldots a_n \varepsilon \mathrm{n} : b \varepsilon \mathrm{n}\, \mathrm{f}(\mathrm{Z}_n, \mathrm{Z}_n) \,.\, z \varepsilon \mathrm{alg}\, \mathrm{f}(\mathrm{Z}_n, \mathrm{Z}_n) \,.\, h, k \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \supset_{h,k} .$
   $z_{hk} = \sum_i b_{ih} y_{ik} : \supset .\, \mathrm{mod}\, \mathrm{Det}^2 y \leqq \mathrm{mod}\, \mathrm{Det}^2 z \,.$
7. $n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, h \varepsilon \Omega \,.\, \mathrm{B} h -= \Lambda \,.\, \supset .\, \mathrm{B}\, \mathrm{int}\, h = \mathrm{B} h \cap \overline{(x_1, x_2, \ldots x_n) \varepsilon}$
   $[x \varepsilon \mathrm{A} \mathrm{f} \mathrm{Z}_n \,.\, a \varepsilon \mathrm{r} \mathrm{f} \mathrm{Z}_n \,.\, a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \varepsilon \mathrm{A} \,.\, \supset .\, a_1, \ldots a_n \varepsilon \mathrm{n}] \,.$

§ 7. - Mod.

1. $\mathrm{Mod} = \mathrm{K}\, \mathrm{alg} \cap \overline{k \varepsilon} (x, y \varepsilon k \,.\, \supset_{x,y} .\, x + y, x - y \varepsilon k) \,.$ [def.]
2. $\Omega \supset \mathrm{Mod} \,.$
3. $a \varepsilon \mathrm{Mod} \,.\, \supset .\, 0 \varepsilon a \,.$
4. $\mathrm{n}, \mathrm{r} \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$
5. $\iota 0 \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$
6. $n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x \varepsilon (\mathrm{alg}\, \mathrm{f} \mathrm{Z}_n) \,.\, \supset .\, \mathrm{r} x_1 + \mathrm{r} x_2 + \ldots + \mathrm{r} x_n \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$

6′. » » $.\, \supset .\, \mathrm{n} x_1 + \mathrm{n} x_2 + \ldots + \mathrm{n} x_n \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$

$a, b, c \varepsilon \mathrm{Mod} \,.\, \supset :$

7. $a \cap b \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$
8. $a + b = \overline{y \varepsilon} (x_1 \varepsilon a \,.\, x_2 \varepsilon b \,.\, y = x_1 + x_2 \,.\, -=_{x_1, x_2} \Lambda) \,.$ [def.]
9. $a + b \varepsilon \mathrm{Mod} \,.$
10. $a + b = b + a \,.\, a + a = a \,.$

---

§ 6.

3, 4. Dedekind, p. 486.

§ 7.

1-6′. Dedekind, p. 493-94.
7. » p. 498.
8-13. » p. 496.

11. $a \supset a + b \,.\, b \supset a + b$.
12. $c \supset a \,.\supset .\, c \supset a + b$.
13. $a \supset b \,.\supset .\, a + b = b$.
14. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\supset :\, u\,a = a\,u = \overline{y\,\varepsilon}\,(x \,\varepsilon\, a \,.\, y = u\,x \,.\, -=_x \Lambda)$. [def.]
15. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\supset .\, a\,u \,\varepsilon\, \mathrm{Mod}$.

§ 8.

$a, b, c \ldots a', b', \ldots \varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\supset :$
1. $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.
2. $a \supset b \,.\, a' \supset b' \,.\supset .\, a + a' \supset b + b'$.
3. $a \supset c \,.\supset .\, a + (b \frown c) = (a + b) \frown c$.
4. $(a + b) \frown (b + c) = b + [a \frown (b + c)]$.
5. $(a \frown b) + (b \frown c) = b \frown [a + (b \frown c)]$.
6. $a\,b = \overline{z\,\varepsilon}\,(k \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, x_1, x_2, \ldots x_k \,\varepsilon\, a \,.\, y_1, y_2, \ldots y_k \,\varepsilon\, b \,.$
$z = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_k y_k \,.\, -=_{k, x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots y_k} \Lambda)$. [def.]
7. $a\,b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod}$.
8. $a\,b = b\,a$.
9. $(a\,b)\,c = a\,(b\,c) = a\,b\,c$.
10. $a\,0 = 0$.
11. $a\,b = 0 \,.\supset .\, a = 0 \,.\cup .\, b = 0$.
12. $a\,\mathrm{n} = a$.
13. $a\,b = a \,.\supset .\, b = \mathrm{n}$.
14. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\supset .\, a\,(\mathrm{n}\,u) = a\,u$.
15. $u, u' \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\supset .\, a\,u\,(\mathrm{n}\,u') = a\,u'\,(\mathrm{n}\,u) = a\,(u\,u') = a\,u\,u$.
16. $1 \,\varepsilon\, a \,.\supset .\, \mathrm{n} \supset a$.
17. $\mathrm{n} \supset a \,.\supset .\, b \supset a\,b$.
18. $a \supset a' \,.\supset .\, a\,b \supset a'\,b$.
19. $a \supset a' \,.\, b \supset b' \,.\supset .\, a\,b \supset a'\,b'$.
20. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \frown -\iota 0 \,.\, a\,u \supset a'\,u \,.\supset .\, a \supset a'$.
21. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \frown -\iota 0 \,.\, a\,u = a'\,u \,.\supset .\, a = a'$.
22. $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$.
23. $(a \frown b)\,c = a\,c \frown b\,c$.
24. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\supset .\, (a + b)\,u = a\,u + b\,u \,.\, (a \frown b)\,u = a\,u \frown b\,u$.

14, 15. Dedekind, p. 501.

§ 8.

Dedekind, §§ 169-170, p. 496-507.

25. $(a + b + c)(bc + ca + ab) = (b + c)(c + a)(a + b)$.

26. $b/a = \mathrm{alg} \frown \overline{x\,\varepsilon}\,(a\,x \supset b)$. [def.]

27. $b/a\ \varepsilon\ \mathrm{Mod}$.

28. $a = \iota 0 \,.\supset.\, b/a = \mathrm{alg}$.

29. $a\,c \supset b \,.=.\, c \supset b/a$.

30. $a \supset a' \,.\, b \supset b' \,.\supset.\, (b/a') \supset (b'/a)$.

31. $a\,(b/a) \supset b \supset a\,b/a$.

32. $b = a\,c \,.\supset.\, a\,(b/a) = b$.

33. $b = c/a \,.\supset.\, b = a\,b/a$.

34. $a/\mathrm{n} = a$.

35. $c/a\,b = (c/a)/b$.

36. $b\,(a/c) \supset a\,b/c$.

37. $(a \frown b)/c = (a/c) \frown (b/c)$.

38. $c/(a + b) = (c/a) \frown (c/b)$.

39. $c/(a \frown b) = (c/a) + (c/b)$.

40. $(a + b)/c = (a/c) + (b/c)$.

41. $a^2 = a\,a$. [def.]

42. $k\ \varepsilon\ \mathrm{N} \,.\supset.\, a^{k+1} = a^k\,a$. [def.]

43. $a^0 = a/a$. [def.]

44. $a\,b \supset a \,.=.\, b \supset a^0$.

45. $\mathrm{n} \supset a^0$.

46. $b \supset b\,a^0$.

47. $a\,a^0 = a$.

48. $a/a^0 = a$.

49. $a^0\,a^0 = a^0$.

50. $\mathrm{n} \supset a \,.\, a^2 \supset a \,.\supset:\, b_1\ \varepsilon\ \mathrm{Mod} \,.\, a = b_1{}^0 \,.-=_{b_1} \Lambda$.

51. $(a^0)^0 = a^0$.

52. $a_1\ \varepsilon\ \mathrm{Mod} \,.\, b^0 \frown c^0 = a^0{}_1 -=_{a_1} \Lambda$.

53. $a_1\ \varepsilon\ \mathrm{Mod} \,.\, b^0\,c^0 = a^0{}_1 \,.-=_{a_1} \Lambda$.

54. $a\,b = a^0\,(a\,b) = b^0\,(a\,b) = a^0\,b^0\,(a\,b)$.

55. $b/a = a^0\,(b/a) = b^0\,(b/a) = a^0\,b^0\,(b/a)$.

56. $a^0 + b^0 \supset a^0\,b^0 \supset (a\,b)^0$.

57. $a^0\,b^0 \supset (b/a)^0$

58. $k\ \varepsilon\ \mathrm{N} \,.\supset.\, a^{-k} = a^0/a^k$. [def.]

59. $a\,a^{-1} \supset a^0$.

60. $a^0\,a^{-1} = a^{-1}$.

61. $a^0 \supset (a^{-1})^0$.

62. $a \supset (a^{-1})^{-1}$.

63. $a\,a^{-1} = a^0 \,.=.\, \mathrm{n} \supset a\,a^{-1}$.

64. Mod prop $= \text{Mod} \frown \overline{a\,\varepsilon}\,(a\,a^{-1} = a^0)$. [def.]
65. Mod prop $= \text{Mod} \frown \overline{a\,\varepsilon}\,(b\,\varepsilon\,\text{Mod} \,.\, a\,b = a^0 \,.\, - =_b \Lambda)$.
66. $a\,\varepsilon$ Mod prop $. \supset .\ a^{-1}\,\varepsilon$ Mod prop .
67. $a\,\varepsilon$ Mod prop $. \supset . (a^{-1})^0 = a^0 . (a^{-1})^{-1} = a$.
68. $a\,\varepsilon$ Mod prop $. b\,\varepsilon$ Mod $. \supset .\ a\,b/a = b\,a^0 ; b\,a^0/a = b a^{-1}$.
69. $a , b\,\varepsilon$ Mod prop $. \supset .\ a\,b\,\varepsilon$ Mod prop .
70. $a , b\,\varepsilon$ Mod prop $. \supset . (a\,b)^0 = a^0\,b^0 ; (a\,b)^{-1} = a^{-1}\,b^{-1}$.

§ 9. - rappr (b , a), R (b , a).

$a , b\,\varepsilon$ Mod $. \supset :$
1. rappr $(b , a) = \text{K alg} \frown \overline{k\,\varepsilon}\,[k \supset b : x , y\,\varepsilon\,k \,.\, \supset_{x,y} .\ x - y - \varepsilon\,a \,.\!\cdot\!.$
$x\,\varepsilon\,b \,.\, \supset_x : y\,\varepsilon\,k \,.\, x - y\,\varepsilon\,a \,.\, - =_y \Lambda]$. [def.]
2. $h , k\,\varepsilon$ rappr $(b , a) . \supset .$ num $h =$ num k.
3. $k\,\varepsilon$ rappr $(b , a) .$ num $k\,\varepsilon\,\text{N} . \supset . \text{R}(b , a) =$ num k. [def.]
4. $k\,\varepsilon$ rappr $(b , a) .$ num $k\,\varepsilon\,\infty . \supset . \text{R}(b , a) = 0$. [def.]
5. $\text{R}(b , a)\,\varepsilon\,\text{N}_0$.
6. $\text{R}(b , a) = 1 . = .\ b \supset a$.
7. $\text{R}(b , a) = \text{R}(b , a \frown b)$.
8. $\text{R}(b , a) = \text{R}(a + b , a)$.
9. $x\,\varepsilon\,\text{alg} \frown - \iota\,0 . \text{R}(b\,x , a\,x) = \text{R}(b , a)$.
10. $x\,\varepsilon\,b . \supset . \text{R}(b , a) \times x\,\varepsilon\,(a \frown b)$.

$a , b , c\,\varepsilon$ Mod $. \supset :$
11. $\text{R}(a , b) = \text{R}(b , c) = 1 . \supset . \text{R}(c , a) = \text{R}(c , b) \times \text{R}(b , a)$.
12. $\text{R}(b , c) \times \text{R}(c , a) \times \text{R}(a , b) = \text{R}(c , b) \times \text{R}(a , c) \times \text{R}(b , a)$.
13. $a , b\,\varepsilon$ Mod $.\ a \supset b . \text{R}(b , a)\,\varepsilon\,\text{N} : k = \text{Mod} \frown \overline{c\,\varepsilon}\,(a \supset c \supset b) .\!\cdot\!. \supset .$num $k\,\varepsilon\,\text{N}$.

§ 10. - Mod fin , Mod fin$_n$.

1. Mod fin $= \overline{a\,\varepsilon}(n\,\varepsilon\,\text{N} . x\,\varepsilon\,\text{alg f Z}_n . a = \text{n}\,x_1 + \text{n}\,x_2 + \ldots + \text{n}\,x_n . - =_{n,x} \Lambda)$. [def.]
2. Mod fin $\supset$ Mod .
2'. $a , b\,\varepsilon$ Mod fin $. \supset .\ ab\,\varepsilon$ Mod fin .

---

§ 9.

1. Dedekind, p. 508.
3, 4. » p. 509.
6-9. » p. 510.
10-13. » p. 510-11.

§ 10.

1. Dedekind, p. 494.
2'. » p. 501.

3. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\supset.\, \mathrm{B}\,a = \overline{(x_1\, x_2 \dots x_n)}\, \varepsilon\, (a = \mathrm{n}\,x_1 + \mathrm{n}\,x_2 + \dots + \mathrm{n}\,x_n)$. [def.]

4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\supset.\, a \frown \mathrm{r} = \mathrm{n} \times \min (a \frown \mathrm{r})$.

5. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \frown - \iota 0 \,.\supset.\, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a = \mathrm{n}\,x_1 + \mathrm{n}\,x_2 + \dots + \mathrm{n}\,x_n :$
$p_1 , p_2 , \dots p_n \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 0 \,.\supset.\, p_1 = p_2 = \dots$
$= p_n = 0 \,.\because. - =_{n, x_1 \dots x_n} \Lambda$.

6. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\supset.\, \mathrm{B\ irr}\, a = \mathrm{B}\,a \frown \overline{(x_1\, x_2 \dots x_n)}\, \varepsilon\, (p_1 , p_2 , \dots p_n \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.$
$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = 0 \,.\supset.\, p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0)$. [def.]

6'. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \frown - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{B\ irr}\, a - = \Lambda$.

7. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset.\, \mathrm{Mod\ fin}_n = \mathrm{Mod\ fin} \frown \overline{a}\, \varepsilon\, (m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, (x_1 , x_2 , \dots x_m) \,\varepsilon\, \mathrm{B\ irr}\, a \,.$
$\supset .\, m = n)$. [def.]

8. $m , n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_n \,.\, (x_1 , x_2 , \dots x_m) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,a \,.\supset.\, m \geqq n$.

9. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_n \,.\, (x_1 , x_2 , x_n) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,a \,.\, (y_1 , y_2 , \dots y_n) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,b$.
$p \,\varepsilon\, \mathrm{n\,f}(\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n .\supset_i . x_i = p_{i1}\, y_1 + \dots + p_{in}\, y_n .\because.\supset. \mathrm{R}\,(b , a) = \pm \mathrm{Det}\, p$.

10. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_n \,.\, (x_1 , x_2 , \dots x_n) , (y_1 , y_2 , \dots y_n) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,a$.
$p \,\varepsilon\, \mathrm{n\,f}(\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n \,.\supset_i.\, x_i = p_{i1}\, y_1 + \dots + p_{in}\, y_n \,.\because.\supset.\, \mathrm{Det}\, p = \pm 1$.

11. $u \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\, (x_1 , x_2 , \dots x_n) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,a \,.\supset.\, a\,u \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}$.
$(u\,x_1 , u\,x_2 , \dots u\,x_n) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\,(a\,u)$.

12. $\mathrm{n} \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_1$.

13. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_1 \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, b \supset a \,.\supset.\, b = \mathrm{R}\,(a , b) \times a$.

14. $\mathrm{Mod\ fin} \frown \overline{a}\, \varepsilon\, (a \supset \mathrm{r}) = \mathrm{Mod\ fin}_1$.

15. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_1 \,.\supset.\, a \frown b = \mathrm{R}\,(b , a) \times b = \mathrm{R}\,(a + b , a) \times b$.

16. $a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, c \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_1 \,.\supset: k \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_1 \,.\, a \frown (b + c) = (a \frown b) + k . - =_k \Lambda$.

17. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_n \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, b \supset a .\supset: m \,\varepsilon\, \mathrm{N} . m \leqq n \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin}_m . - =_m \Lambda$.

18. $b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} : n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset_n.\, a_n \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} \,.\, a_n \supset b \,.\, a_n \supset a_{n+1} : \supset \therefore$
$i \,\varepsilon\, \mathrm{N} : k \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\supset_k.\, a_{i+k} = a_i : - =_i \Lambda$.

§ 11.

1. $\mathrm{alg} \frown \overline{x}\, \varepsilon\, (a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\, a\,x \supset a \,.\, - =_a \Lambda) = \mathrm{A}$.

2. $\mathrm{alg} \frown \overline{x}\, \varepsilon\, (a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\, x \,\varepsilon\, a^0 \,.\, - =_a \Lambda) = \mathrm{A}$.

3. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \frown - \iota 0 \,.\supset.\, a^0 \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\ fin} \,.\, a^0 - = 0 \,.\, a^0 \supset \mathrm{A}$.

---

3. DEDEKIND, p. 494.
5-6'. » p. 518.
7. » p. 494.
9. » p. 523.
13-17 » p. 514-17.
18. DEDEKIND, p. 523.

§ 11.

1, 2. DEDEKIND, p. 526.
3. » p. 527.

4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\,fin} \cap - \iota\, 0 . \supset .\!\cdot.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\,fin} . \mathrm{n} \supset ab : x \,\varepsilon\, a . y \,\varepsilon\, b . \supset_{x,y} . x \times y \,\varepsilon\, \mathrm{A} : -=_b \Lambda .$
5. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . x_1 , x_2 , \ldots x_n \,\varepsilon\, \mathrm{alg} \cap - \iota\, 0 . \supset .\!\cdot.\, y_1 , y_2 , \ldots y_n \,\varepsilon\, \mathrm{alg} .$
$x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = 1 : i , k \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n . \supset_{i,k} . x_i y_k \,\varepsilon\, \mathrm{A} : -=_{y_1, \ldots y_n} \Lambda .$
6. $k \,\varepsilon\, \Omega . a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod} . \mathrm{B}\, k \cap \mathrm{B}\, a -= \Lambda . \supset . a \supset k .$
7. $n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . x \,\varepsilon\, \mathrm{alg\, f}(\mathrm{Z}_n , \mathrm{Z}_n) : i , k \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n . \supset_{i,k} . x_{ik} \,\varepsilon\, \mathrm{conj}\, x_{i1} :$
$a \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\,fin}_n \cap \iota\, \mathrm{n}\, x_{11} + \ldots + \mathrm{n}\, x_{n1} : h \,\varepsilon\, \Omega_n . (x_{11} , \ldots x_{n1}) \,\varepsilon\, \mathrm{B}\, h . -=_h \Lambda :$
$\Delta\, a = \mathrm{Det}^2 x .$ [def.]

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\,fin}_n : h \,\varepsilon\, \Omega_n . \mathrm{B}\, a \cap \mathrm{B}\, h -= \Lambda . \mathrm{B}\, b \cap \mathrm{B}\, h -= \Lambda : \supset :$
8. $a \supset b . \supset . \Delta\, a = \mathrm{R}(b , a)^2 \times \Delta\, b .$
9. $\Delta\,(a \cap b) = \mathrm{R}(a , b)^2 \times \Delta\, a = \mathrm{R}(b , a)^2 \times \Delta\, b .$

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . h \,\varepsilon\, \Omega_n . o = h \cap \mathrm{A} . \supset .$
10. $(h \cap \mathrm{U}) \supset o .$
11. $o \,\varepsilon\, \mathrm{Mod\,fin} .$
12. $o^2 = o .$
13. $\mathrm{n} \supset o .$
14. $\mathrm{B}\, o = \mathrm{B\,int}\, h .$
15. $x \,\varepsilon\, o . \supset . o x \supset o .$
16. $x \,\varepsilon\, \mathrm{U} \cap o . \supset . o x = o .$

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} . h \,\varepsilon\, \Omega_n . o = h \cap \mathrm{A} . x , y , z \,\varepsilon\, o . \supset :$
17. $x , y \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times z . \supset . x + y , x - y \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times z .$
18. $x \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times y . y \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times z . \supset . x \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times z .$
19. $x \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times y . \supset . \mathrm{norm}\, x \,\varepsilon\, \mathrm{n} \times \mathrm{norm}\, y .$
20. $\mathrm{R}(o , o x) = \pm\, \mathrm{norm}\, x .$
21. $x \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times y . = . o x \supset o y .$
22. $\mathrm{norm}\, x \,\varepsilon\, o x .$
23. $\mathrm{norm}\, x = x \times y . \supset . \mathrm{norm}\, y = (\mathrm{norm}\, x)^{n-1} .$
24. $\mathrm{alg\,dec}\, h = o \cap \overline{x\,\varepsilon}\, (y , z \,\varepsilon\, o \cap - \mathrm{U} . x = y \times z . -=_{y,z} \Lambda) .$ [def.]
25. $\mathrm{alg\,dec}\, h = \overline{x\,\varepsilon}\, (m \,\varepsilon\, (\mathrm{N} + 1) . y_1 , y_2 , \ldots y_m \,\varepsilon\, o \cap - \mathrm{alg\,dec}\, h .$
$x = y_1 y_2 \ldots y_m . -=_{m . y_1, \ldots y_m} \Lambda) .$
26. $\mathrm{alg\,pr}\, h = o \cap - \mathrm{U} \cap \overline{x\,\varepsilon}\, (y , z \,\varepsilon\, o \cap - \mathrm{A} \times x . y z \,\varepsilon\, \mathrm{A} \times x . =_{y,z} \Lambda) .$ [def.]
27. $\mathrm{alg\,dec}\, h \cap \mathrm{alg\,pr}\, h = \Lambda .$
28. $o \cap - \mathrm{alg\,dec}\, h \cap - \mathrm{alg\,pr}\, h -= \Lambda .$

4, 5. Dedekind, p. 528.
7-13. » p. 536-38.
16. » p. 543.
19, 20. » p. 541.
21-23. Dedekind, p. 542.
24. » p. 543.
25, 26. » p. 544.
27, 28. » p. 545.

§ 12. - id‘, H‘.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, h \varepsilon \Omega_n \,.\, o = h \frown \Lambda \,.\, \supset .$

1. $\mathrm{id}' h = \mathrm{Mod} \frown \overline{a} \varepsilon (a - \iota 0 \,.\, a \supset o \,.\, o\, a \supset a)$. [def.]
2. $\mathrm{id}' h \supset \mathrm{Mod\ fin}$.
3. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset .\, o\, a = a$.
4. $x \varepsilon o \,.\, \supset .\, o\, x \varepsilon \mathrm{id}' h$.
5. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset .\, \mathrm{norm}\, a = \mathrm{R}(o, a)$. [def.]

$a, b \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset :$

6. $a\, b \varepsilon \mathrm{id}' h$.
7. $a\, b \supset a \,;\, a\, b \supset b \,;\, a\, b \supset (a \frown b)$.
8. $a\, a^{-1} = o$.
9. $a \supset a\, b \,.\, \supset .\, b = o$.

$a, b, c \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset :$

10. $a\, c = b\, c \,.\, \supset .\, a = b$.
11. $a\, c \supset b\, c \,.\, \supset .\, a \supset b$.

12. $a, b \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a \supset b \,.\, \supset .\, c \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a = b\, c \,. - =_c \Lambda$.
13. $a, b, c \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a = b\, c \,.\, \supset .\, c = a/b = a\, b^{-1}$.
14. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, k = \mathrm{id}' h \frown \overline{b} \varepsilon (a \supset b) \,.\, \supset .\, \mathrm{num}\, k \varepsilon \mathrm{N}$.
15. $\mathrm{H}' h = \mathrm{id}' h \frown \overline{a} \varepsilon (x \varepsilon o \,.\, a = o\, x \,. - =_x \Lambda)$. [def.]
16. $o \varepsilon \mathrm{H}' h$.
16'. $x \varepsilon o \,.\, a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset :\, o x \supset a \,. = .\, x \varepsilon a$.
17. $a, b \varepsilon \mathrm{H}' h \,.\, \supset .\, a\, b \varepsilon \mathrm{H}' h$.
18. $x \varepsilon o \,.\, \supset .\, \mathrm{norm}\, o\, x = \pm\, \mathrm{norm}\, x$.
19. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset .\, b \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a\, b \varepsilon \mathrm{H}' h \,. - =_b \Lambda$.
20. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset .\, a \frown \mathrm{r} = a \frown \mathrm{n} = \mathrm{n} \times \mathrm{R}(\mathrm{n}, a)$.
21. $\mathrm{id}' h \frown \overline{a} \varepsilon (a \supset \mathrm{r}) \supset \mathrm{H}' h$.
22. $\mathrm{n} \varepsilon \mathrm{H}' h$.
23. $a, b \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset .\, a + b \,.\, a \frown b \varepsilon \mathrm{id}' h$.

---

§ 12.

1. Dedekind, p. 551.
2, 3. » p. 552.
6, 7. » p. 552.
8-13. » p. 553.
14. Dedeind, p. 554.
15. » p. 551.
16, 16'. » p. 552.
19, 20. » p. 554.
23-25. » p. 555.

24. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\!\cdot.\, a', b' \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a \frown b = a a' = b b' \,.\, a' + b' = o \,.$
$a = (a + b)\, a' \,.\, b = (a + b)\, b' : - =_{a', b'} \Lambda \,.$

25. $a, b, c, \ldots \varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\!\cdot.\, a', b', c', \ldots \varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a' + b' + c' + \ldots = o \,.$
$a \frown b \frown c \frown \ldots = a a' = b b' = c c' = \ldots : - =_{a', b', c', \ldots} \Lambda \,.$

§ 13.

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, h \,\varepsilon\, \Omega_n \,.\, o = h \frown \Lambda \,.\, \supset .$

1. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset : a + b = o \,.=.\, a b = a - b \,.$
2. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a + b = o \,.\, \supset .\, a + b c = a + c \,.$
3. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a + b = a + c = o \,.\, \supset .\, a + b c = o \,.$
4. $m, q \,\varepsilon\, \mathrm{N} : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m . k \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_q \,.\, \supset_{i, k} .\, a_i, b_k \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h . a_i + b_k = o . \supset .\, \Pi\, a_i + \Pi\, b_k = o \,.$
5. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a + b = o \,.\, b\, c \supset a \,.\, \supset .\, c \supset a \,.$
6. $a, b, a', b' \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a + b = o \,.\, a \supset a' \,.\, b \supset b' \,.\, \supset .\, a' + b' = 0 \,.$
7. $a, b, c, \ldots \varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, a + b + c + \ldots = 0 \,.\, \supset .\, a \frown b \frown c \frown \ldots = a b c \ldots .$
8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}' h . m \,\varepsilon\, \mathrm{N} : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m . \supset_i . c_i \,\varepsilon\, \mathrm{id}' h . a - \supset c_i : \supset .\!\cdot. x \,\varepsilon\, a : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_n . \supset . x - \varepsilon\, c_i : - =_x \Lambda \,.$
9. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\, x \,\varepsilon\, a \,.\, a b + o x = a \,.\, - =_x \Lambda \,.$
10. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\, c \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, b + c = 0 \,.\, a\, c \,\varepsilon\, \mathrm{H}'\, h \,.\, - =_c \Lambda \,.$
11. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\, x, y \,\varepsilon\, o \,.\, o x + o y = a \,.\, =_{x, y} \Lambda \,.$
12. $x, y \,\varepsilon\, o \frown - \iota 0 \,.\, \supset : o x + o y = o \,.=.\, u, v \,\varepsilon\, o \,.\, u x + v y = 1 . - =_{u, v} \Lambda \,.$
13. $x, y \,\varepsilon\, o \frown - \iota 0 \,.\, x\, \pi\, y \,.\, \supset .\, u, v \,\varepsilon\, o \,.\, u x + v y = 1 \,.\, - =_{u, v} \Lambda \,.$
14. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, k \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, o k + a = o \,.\, \supset .\, k\, \pi\, \mathrm{R}(\mathrm{n}, a) \,.$

§ 14. - id pr‘ .

$n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, h \,\varepsilon\, \Omega_n \,.\, o = h \frown \Lambda \,.\, \supset .$

1. $\mathrm{id\,pr}'\, h = \mathrm{id}'\, h \frown \overline{p\, \varepsilon}\, (a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h - \iota o \,.\, p \supset a \,.\, \supset .\, a = p) \,.$ [def.]
2. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, \supset .\, a \supset p \smile a + p = o \,.$
3. $a, b, c, \ldots \varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, a b c \ldots \supset p \,.\, \supset .\, a \supset p \smile b \supset p \smile c \supset p \smile \ldots .$
4. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \frown - \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, \supset .\, x, y \,\varepsilon\, o \frown - a \,.\, x y \,\varepsilon\, a \,.\, - =_{x, y} \Lambda \,.$
5. $x \,\varepsilon\, \mathrm{alg\,pr}\, h \,.=.\, o x \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.$
6. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset .\, p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, a \supset p \,.\, - =_p \Lambda \,.$
7. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h . \supset . m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, p_1, p_2, \ldots p_m \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h . a = p_1 p_2 \ldots p_m . - =_{m, p_1, \ldots p_m} \Lambda \,.$
8. $a \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h . m, k \,\varepsilon\, \mathrm{N} : i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m . l \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_k . \supset_{i, l} .\, p_i, p'_l \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h . a = \Pi\, p_i = \Pi\, p'_l :$
$\supset :: m = k .\!\cdot.\, i \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m \,.\, \supset : l \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_k \,.\, p_i = p'_l \,.\, - =_l \Lambda \,.$
9. $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{id}'\, h \,.\, \supset :: a \supset b \,.=.\!\cdot.\, p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, \supset : k \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, b \supset p^k \,.\, \supset .\, a \supset p^k \,.$
10. $p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, \supset .\, \mathrm{R}(\mathrm{n}, p) \,\varepsilon\, \mathrm{Np} \,.$
11. $p \,\varepsilon\, \mathrm{id\,pr}'\, h \,.\, \supset .\, p \frown \mathrm{Np} \frown - \iota\, \mathrm{R}(\mathrm{n}, p) = \Lambda \,.$

---

§ 13.

DEDEKIND, § 178, p. 556 60.

§ 14.

DEDEKIND, § 179, p. 560-63.

§ 15.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, h \varepsilon \Omega_n \,.\, o = h \frown \mathrm{A} \,.\, a \,, b \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, \supset :$

1. $\mathrm{R}(a, ab) = \mathrm{norm}\, b \,.$
2. $\mathrm{norm}\, ab = \mathrm{norm}\, a \times \mathrm{norm}\, b \,.$
3. $a/(a+b) = (a \frown b)/b = c \,.\supset: d \varepsilon \mathrm{id}' h .\supset. \mathrm{R}(bd, ad) = \mathrm{R}(b, a) = \mathrm{norm}\, c \,.$
4. $o \times \mathrm{norm}\, a \supset a \,.$
5. $o \times \mathrm{norm}\, a = ab \,.\supset.\, \mathrm{norm}\, b = (\mathrm{norm}\, a)^{n-1} \,.$
6. $k \varepsilon \mathrm{N} \,.\, a + ok = o \,.\supset.\, \mathrm{norm}\, a \,\pi\, k \,.$
7. $p \varepsilon \mathrm{id\,pr}' h \,.\supset.\, k \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \mathrm{norm}\, p = [\mathrm{R}(\mathrm{n}, p)]^k \,. - =_k \Lambda \,.$
8. $p \varepsilon \mathrm{id\,pr}' h \,.\, \mathrm{norm}\, p = [\mathrm{R}(\mathrm{n}, p)]^n \,.\supset.\, p \varepsilon \mathrm{H}' h \,.$

§ 16.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, h \varepsilon \Omega_n \,.\, o = h \frown \mathrm{A} \,.\, x, y, x', y' \varepsilon o \,.\, a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\supset :$

1. $x - y, x' - y' \varepsilon a \,.\supset.\, xx' - yy' \varepsilon a \,.$
2. $x(y - y') \varepsilon a \,.\, ox + a = o \,.\supset.\, y - y' \varepsilon a \,.$
3. $x(y - y') \varepsilon a : b, c \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\supset_{b,c} .\, a = bc \,.\, ox + a = b :\supset.\, y - y' \varepsilon c \,.$
4. $ox + a = o \,.\supset.\, u \varepsilon o \,.\, ux - y \varepsilon a \,. - =_u \Lambda \,.$
5. $a \varepsilon \mathrm{id}' h . \mathrm{M} = \mathrm{K}\, o \frown \overline{k \varepsilon} (x \varepsilon k \,.\supset_x .\, ox + a = o : x, y \varepsilon k \,.\supset_{x,y} .\, x - y \varepsilon a :$
   $x \varepsilon k \,.\, y \varepsilon o \,.\, x - y \varepsilon a \,.\supset_y .\, y \varepsilon k) \,.\supset.\, \varphi(a) = \mathrm{num}\, \mathrm{M} \,.$ [def.]
6. $\varphi(o) = 1 \,.$
7. $a, b, c \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a = bc \,.\, \mathrm{M}' = \mathrm{K}\, o \frown \overline{k \varepsilon} (x \varepsilon k \,.\supset_x .\, ox + a = b :$
   $x, y \varepsilon k . \supset_{x,y} . x - y \varepsilon a : x \varepsilon k . y \varepsilon o . x - y \varepsilon a . \supset_y . y \varepsilon k) . \supset . \mathrm{num}\, \mathrm{M}' = \varphi(c).$
8. $m \varepsilon \mathrm{N} . a \varepsilon \mathrm{id}' h .\cdot. b \varepsilon (\mathrm{id}' h \,\mathrm{f}\, \mathrm{Z}_m) . \supset : a \supset b : k \varepsilon \mathrm{id}' h \frown - = b . a \supset k \,. =_k \Lambda .\cdot.$
   $\supset .\, \varphi(b_1) + \varphi(b_2) + \ldots + \varphi(b_m) = \mathrm{norm}\, a \,.$
9. $a, b, c, \ldots \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a + b + c + \ldots = o \,.\, x, y, z, \ldots \varepsilon o \,.\supset.$
   $u \varepsilon o \,.\, u - x \varepsilon a \,.\, u - y \varepsilon b \,.\, u - z \varepsilon c \ldots - =_u \Lambda \,.$
10. $a, b, c, \ldots \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, a + b + c + \ldots = o \,.\supset.\, \varphi(abc\ldots) = \varphi(a) \times \varphi(b) \times \ldots$
11. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, m \varepsilon \mathrm{N} : i \varepsilon \mathrm{Z}_m \,.\supset_i .\, p_i \varepsilon \mathrm{id\,pr}' h \,.\, a = \Pi p_i :$
   $\supset .\, \varphi(a) = \mathrm{norm}\, a \times \Pi(1 - 1/\mathrm{norm}\, p_i) \,.$
12. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, m \varepsilon \mathrm{N} : i \varepsilon \mathrm{Z}_m \,.\supset_i .\, p_i \varepsilon \mathrm{id\,pr}' h \,.\, k_i \varepsilon \mathrm{N} \,.\, a = \Pi p_i^{k_i} .$
   $f_i \varepsilon \mathrm{Z}_n \,.\, \mathrm{norm}\, p_i = [\mathrm{R}(\mathrm{n}, p_i)]^{f_i} : \supset . \varphi(a) = \Pi(p_i^{k_i f_i} - p_i^{(k_i - 1) f_i}) \,.$
13. $p \varepsilon \mathrm{id\,pr}' h \,.\, x \varepsilon o \,.\supset.\, x^{\mathrm{norm}\, p} - x \varepsilon p \,.$
14. $a \varepsilon \mathrm{id}' h \,.\, x \varepsilon o \,.\, ox + a = o \,.\supset.\, x^{\varphi(a)} - 1 \varepsilon a \,.$

---

§ 15.

DEDEKIND, § 180, p. 564-65.

§ 16.

1, 2, 3. DEDEKIND, p. 566.
5, 6. » p. 567.
7-15. » p. 568-70.

§ 17.

$n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, h \varepsilon \Omega_n \,.\, o = h \frown \mathrm{A} \,.\, a\,, a' \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, \supset :$

1. $a \,\mathrm{eq}\, a' \,.=.\, b \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, ab\,, a'b \varepsilon \mathrm{H}`\, h \,.-=_b \Lambda \,.$ [def.]
2. $a \,\mathrm{eq}\, a' \,.=.\, a' \,\mathrm{eq}\, a \,.$
3. $a \,\mathrm{eq}\, a' \,.=.\, x\,, y \varepsilon o \,.\, ax = a'y \,.-=_{x,y} \Lambda \,.$
4. $a \,\mathrm{eq}\, a' \,.\, b \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, ab \varepsilon \mathrm{H}`\, h \,.\supset.\, a'b \varepsilon \mathrm{H}`\, h \,.$
5. $a\,, a'\,, a'' \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, a \,\mathrm{eq}\, a' \,.\, a' \,\mathrm{eq}\, a'' \,.\supset.\, a \,\mathrm{eq}\, a'' \,.$
6. $a\,, b\,, a'\,, b' \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, a \,\mathrm{eq}\, a' \,.\, b \,\mathrm{eq}\, b' \,.\supset.\, ab \,\mathrm{eq}\, a'b' \,.$
7. $a\,, b \varepsilon \mathrm{H}`\, h \,.\supset.\, a \,\mathrm{eq}\, b \,.$
8. $I`\, h = \mathrm{K}\, \overline{\mathrm{id}`\, h} \frown \overline{k} \varepsilon (a\,, b \varepsilon k \,.=.\, a \,\mathrm{eq}\, b) \,.$ [def.]
9. $\mathrm{H}`\, h \varepsilon I`\, h \,.$
10. $A\,, B \varepsilon I`\, h .\supset. AB = \mathrm{id}`\, h \frown \overline{k} \varepsilon (a \varepsilon A . b \varepsilon B \,.\, k \,\mathrm{eq}\, ab .-=_{a,b} \Lambda) \,.$ [def.]
11. $A\,, B \varepsilon I`\, h \,.\supset.\, AB \varepsilon I`\, h \,.\, AB = BA \,.$
12. $A\,, B \varepsilon I`\, h \,.\, c \varepsilon AB \,.-\supset.\, a \varepsilon \mathrm{A} \,.\, b \varepsilon B \,.\, c = ab \,.-=_{a,b} \Lambda \,.$
13. $A\,, B\,, C \varepsilon I`\, h \,.\supset.\, (AB)\, C = A\,(BC) = ABC \,.$
14. $A\,, B \varepsilon I`\, h \,.\, a \varepsilon A \frown B \,.\supset.\, A = B \,.$

$A \varepsilon I`\, h \,.\, \supset :$

15. $k \varepsilon \mathrm{N} + 1 \,.\supset.\, A^k = A^{k-1} A \,.$ [def.]
16. $\mathrm{A}^0 = \mathrm{H}`\, h \,.$ [def.]
17. $A\, \mathrm{H}`\, h = \mathrm{H}`\, h\, A = A\, A^0 = A \,.$
18. $B \varepsilon I`\, h \,.\, AB = \mathrm{H}`\, h \,.-=_B \Lambda \,.$
19. $k \varepsilon \mathrm{N} .\supset. A^{-k} = \mathrm{id}`\, h \frown \overline{b} \varepsilon (a \varepsilon \mathrm{A} \,.\supset.\, a^k b \varepsilon \mathrm{H}`\, h) \,.$ [def.]
20. $k \varepsilon \mathrm{N} \,.\supset.\, A^{-k} \varepsilon I`\, h \,.$
21. $m\,, k \varepsilon \mathrm{n} \,.\supset.\, A^m A^k = A^{m+k} \,.$
22. $A\,, B \varepsilon I`\, h \,.\supset:\, A = B^{-1} \,.=.\, B = A^{-1} \,.$
23. $A\,, B\,, C \varepsilon I`\, h \,.\supset:\, C = AB \,.=.\, B = CA^{-1} \,.$
24. $A\,, B\,, C \varepsilon I`\, h \,.\, AB = AC \,.\supset.\, B = C \,.$
25. $A \varepsilon I`\, h \,.\, k \varepsilon \mathrm{Q} \,.\supset.\, a \varepsilon A \,.\, \mathrm{norm}\, a \leqq \mathrm{Q} \,.-=_a \Lambda \,.$
26. $\mathrm{num}\, I`\, h \varepsilon \mathrm{N} \,.$
27. $k \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, I`\, h = k \,.\, A \varepsilon I`\, h \,.\supset.\, A^k = \mathrm{H}`\, h.$

$k \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \mathrm{num}\, I`\, h = k \,.\, a \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, x \varepsilon o \,.\supset.\, a^k = ox : y \varepsilon \mathrm{alg} \,.\, x = y^k : \supset :$

28. $y \varepsilon h \,.\supset.\, a = oy \,.\, (a \varepsilon \mathrm{H}`\, h) \,.$
29. $a - \varepsilon \mathrm{H}`\, h \,.\supset.\, y - \varepsilon h \,.$
30. $a = o \frown \mathrm{A} \times y \,.$
31. $\mathrm{alg}\, \mathrm{id}`\, h = \mathrm{alg} \frown -o \frown \overline{y} \varepsilon (a \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\, a = oy \frown o \,.-=_a \Lambda) \,.$ [def.]
32. $a \varepsilon \mathrm{id}`\, h \,.\supset.\, x \varepsilon o \smile \mathrm{alg}\, \mathrm{id}`\, h \,.\, a = ox \frown o \,.-=_x \Lambda \,.$

G. Fano.

---

§ 17. Dedekind, § 181. p. 573-76.

ADDITIONS ET CORRECTIONS

On prie de faire tout de suite ces corrections dans le texte, ou au moins d'indiquer dans les différentes places qu'il y a des additions ou des modifications à faire; car les notes et les tables suivantes se rapportent au texte **corrigé**.

Sigles des Auteurs qui ont indiqué ces additions: b = Bettazzi; bf = Burali-Forti; c = Castellano; f = Fano; g = Giudice; p = Peano.

I. — § 1.

Ajoutez:

14'. $abc = bac$.
26'. $b \supset . a = ab$.
44'. $ab = ac . = : a \supset . b = c$.
46. $a \supset . b = cd : \supset : ac \supset . b = d$.
47. $abc \supset . bd = ce : = : abc \supset . d = e$.
48. $a \supset b . ab \supset c . \supset . a \supset c$.
49. $ab \supset c . ac \supset d . \supset . ab \supset cd$.

§ 2.

Ajoutez:

25'. $a \supset b \cup c . = . a - b \supset c$. $\left[\binom{-b}{b} \text{P25} = \text{P25}'\right]$

28'. $ac \supset b . a \supset b \cup c . \supset . a \supset b$.
Peirce (v. Schröder, *Alg. d. Logik*, I, p. 363).

36. $a \supset c . \cup . b \supset c . \supset . ab \supset c$.
37. $c \supset a . \cup . c \supset b . \supset . c \supset a \cup b$.
38. $a - a \supset b$. [P38 = P15]

(α) $a - a \supset b - b$. $\left[\binom{b - b}{b} \text{P38} = (\alpha)\right]$

39. $a - a = b - b$. $\left[(\alpha) . \binom{b\,,\,a}{a\,,\,b} (\alpha) . = . \text{P39}\right]$

§ 3.

Corrigez:

1. $\Lambda = a - a$. [Def.]

(C. BURALI-FORTI, *Logica Matematica*, a. 1894, pag. 49.)

Ajoutez:

9'. $a = b \, . = . \, a - b \cup b - a = \Lambda$.

SCHRÖDER, id., I, p. 359.

14'. $a \supset b \, . \supset : a - = \Lambda \, . \supset . \, b - = \Lambda$.

Corrigez:

28. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

§ 4.

Ajoutez:

$a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \supset :$

11. $x \, \varepsilon \, a \, . \, a \supset b \, . \supset . \, x \, \varepsilon \, b$. [P1 ⊃ P11]

12. $x \, \varepsilon \, a \, . \supset . \, a - = \Lambda$.

13. $x \, \varepsilon \, \iota y \, . = . \, x = y$. [Def.]

13'. $\iota y = \overline{x} \, \varepsilon \, (x = y)$.

14. $x \, \varepsilon \, a \, . = . \, \iota x \supset a$.

15. $x \, \varepsilon \, a \, . = . \, \iota x \cap a - = \Lambda$.

16. $x - \varepsilon \, a \, . = . \, \iota x \cap a = \Lambda$.

$a, b, c, \ldots \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \supset :$

§ 1 P1-11, 13-25, 28-36, 40-41; § 2 P1-39; § 3 P1-31.

§ 5.

Ajoutez:

18'. » $. \supset . \, (f^m)^n = f^{mn}$.

34. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \, f \, \varepsilon \, b \, \mathrm{f} \, a \, . \supset .\because f \, \varepsilon \, \mathrm{Sim} \, . =: x, y \, \varepsilon \, a \, . \, x - = y \, . \supset_{x,y} . \, fx - = fy$. [Def.]

35. » $. \, f \, \varepsilon \, (b \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{sim} \, . \supset . \, f \, \varepsilon \, (b \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{Sim}$.

36. » $. \, f \, \varepsilon \, (b \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{Sim} \, . \supset . \, f \, \varepsilon \, (f a \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{sim}$.

37. $s \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \, \mathrm{num} \, s \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, . \supset : f \, \varepsilon \, (s \, \mathrm{f} \, s) \, \mathrm{sim} \, . = . \, f \, \varepsilon \, (s \, \mathrm{f} \, s) \, \mathrm{Sim}$.

38. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \, f \, \varepsilon \, (b \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{sim} \, . \supset . \, \overline{f} \, \varepsilon \, (a \, \mathrm{f} \, b) \, \mathrm{sim}$.

39. $a, b, c \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \, f \, \varepsilon \, (b \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{sim} \, . \, g \, \varepsilon \, (c \, \mathrm{f} \, b) \, \mathrm{sim} \, . \supset . \, g f \, \varepsilon \, (c \, \mathrm{f} \, a) \, \mathrm{sim}$. (p

II. — § 1.

56. Au lieu de $p-1+Z_{q-p}$ lisez $p-1+Z_{q+1-p}$

§ 2.

26. Changez l'Hp en $b-=0$.
27. » $a, b-=0$.
28, 29. » $b\,.\,c-=0$.
31. Ajoutez l'Hp $a-=0$.

Ajoutez:
42'. $a/b = c/d \,.=.\, ad = bc$.
EUCLIDES, VII, 19.

§ 3.

12. Corrigez: $\mathrm{mod}\,(a^m) = (\mathrm{mod}\,a)^m$.
14. Au lieu de $a\,\varepsilon - \mathrm{Q}$ lisez $a\,\varepsilon - \mathrm{Q}$.

§ 4.

Ajoutez:
14. $(a+b)^2 + a^2 + b^2 = 2\,(a^2 + ab + b^2)$.
15. $4\,(a^2 + ab + b^2) = 3\,(a+b)^2 + (a-b)^2$.
37. $4\,(a^3 + b^3) = (a+b)^3 + 3\,(a+b)\,(a-b)^2$.
38. $a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3 = (a+b)\,(a^2 + b^2)$.
39. » » » $= \frac{1}{2}\,(a+b)^3 + \frac{1}{2}\,(a+b)\,(a-b)^2$.
50. Au lieu de $ab - a'b$ lisez $ab' + a'b$.
52'. $(a^2 - pb^2 - qc^2 + pqd^2)\,(a'^2 - pb'^2 - qc'^2 + pqd'^2) =$
$(aa' + pbb' \pm q\,(cc' + dd'))^2 - p\,(ab' + a'b \pm q\,(cd' + c'd))^2$
$- q\,(ac' - pbd' \pm (ac' - pb'd))^2 + pq\,(bc' - ad' \pm (a'd - b'c))^2$.
LAGRANGE, *Nouv. Mém. de Berlin*, a. 1770, p. 133; *Œuvres*, III, p. 201.

59. Au lieu de $(a^4 - 2\,ab + 2\,b^2)$ lisez $(a^2 - 2\,ab + 2\,b^2)$

Ajoutez:
60'. $(a+b)^4 + a^4 + b^4 = 2\,(a^2 + ab + b^2)^2$.
60''. $8\,(a^4 + b^4) = (a+b)^4 + 6\,(a+b)^2\,(a-b)^2 + (a-b)^4$.
66. $(a+b)^8 + a^8 + b^8 = 2\,(a^2 + ab + b^2)\,[(a^2+ab+b^2)^3 + 4\,a^2b^2(a+b)^2]$.
67. $(a+b)^{10} + a^{10} + b^{10} = (a^2 + ab + b^2)^2\,[2(a^2+ab+b^2)^3 + 15\,a^2\,b^2(a+b)^2]$.
14, 60', 66, 67. E. SADUN. Riv. di Mat., IV, pag. 189.
37, 60''. CAVALIERI, *Exercitationes geometricae*, a. 1647, pag. 269.

§ 5.

27. Au lieu de $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ lisez $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

§ 6.

26. (Dans quelques exemplaires) au lieu de $-b$ lisez b.

§ 7.

21. Au lieu de $. =$ lisez $. = .$

§ 8.

29. Au lieu de $xy = \frac{b^3 - a}{3b}$ lisez $3bxy = b^3 - a$.

§ 9.

17. Corrigez l' Hp : $n \varepsilon \mathrm{N}$

§ 10.

9. Au lieu de $m / 12$ lisez $m^2 / 12$.
21. Au lieu de $\leq$ lisez $\geq$.

Ajoutez :

$n \varepsilon \mathrm{N} + 1 \,.\, x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q\,f\,Z}_n \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{Q\,f\,Z}_n \,.\, \mathrm{\supset} :$

25. $\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=n}^{i=n-1} \sum_{j=i+1}^{j=n} m_i m_j (x_i y_j - x_j y_i)^2.$

26. $(\Sigma m_i x_i^2)(\Sigma m_i y_i^2) \geq (\Sigma m_i x_i y_i)^2.$ [P25 $\supset$ P26]

27. $(\Sigma m_i x_i^2) \Sigma m_i \geq (\Sigma m_i x_i)^2.$ $\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ y_1, & y_2, & \ldots \end{pmatrix} \text{P26} = \text{P27}\right]$

28. $\sqrt{\frac{\Sigma m_i x_i^2}{\Sigma m_i}} \geq \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}.$ [P27=P28]

29. $\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ $\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ m_1 & \ldots & m_n \end{pmatrix}$ P28=P29

29. CAUCHY, *Analyse algébrique*, a. 1821, p. 453.

30. $z \varepsilon \operatorname{Med}(x_1, \ldots, x_n) .=. \min(x_1, \ldots, x_n) \leqq z \leqq \max(x_1, \ldots, x_n)$. Def.

31. $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \varepsilon \operatorname{Med}(x_1, \ldots, x_n)$.

32. $\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \varepsilon \operatorname{Med}(x_1, \ldots x_n)$.

33. $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \varepsilon \operatorname{Med}\left(\frac{x_1}{m_1}, \frac{x_2}{m_2}, \ldots \frac{x_n}{m_n}\right)$. $\left[\binom{x|m}{x} \text{P32} = \text{P33}\right]$

30-33. CAUCHY. *Analyse algébrique,* a. 1821, pag. 17.

34. $m \varepsilon (\mathrm{Q\,f\,Z}_m) \operatorname{decr} . \supset .$

$$\frac{(m_1 - m_2)x_1 + (m_2 - m_3)x_2 + \ldots + (m_{n-1} - m_n)x_{n-1} + m_n x_n}{m_1} \varepsilon \operatorname{Med}(x_1, \ldots, x_n).$$

$\left[\binom{m_1 - m_2, \ldots}{m_1, \ldots} \text{P32} \supset \text{P34}\right]$

35. $\text{Hp P34} . \supset . \frac{m_1 x_1 + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})}{m_1} \varepsilon \operatorname{Med}(x_1 \ldots x_n)$.

[P34=P35]

36. » $. \supset . \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1} \varepsilon \operatorname{Med}(x_1, \Sigma x_2, \ldots, \Sigma x_n)$.

$\left[\binom{\Sigma x}{x} \text{P35} = \text{P36}\right]$

34-36. ABEL, *Crelle J.,* a. 1826; *Œuvres,* I, pag. 222. (p

III. — § 1.

15. Ajoutez à l' Hp. $c - = 0$.

Ajoutez:

27'. $(a^2 - 1)\, a^2\, (a^2 + 1) \varepsilon 60\,\mathrm{n}$.

MATHESIS, a. 1894, pag. 213.

32. Écrivez l' Hp. $a, b \varepsilon \mathrm{N}$.

§ 3.

Ajoutez:

8''. $\mathrm{D}(2a - 1, 2a + 1) = 1$.

16. Au lieu de $\supset$. lisez $\supset$:

La définition 1' ne satisfait pas à toutes les lois sur les définitions. On pourrait la modifier, et simplifier les autres propositions; mais en attendant la publication d'une théorie complète des nombres, on peut supprimer les propositions 1', 2', 9', 12', 25.

§ 4.

Supprimez les propositions 1', 3', 7, 10. [Même remarque]

§ 5.

Ajoutez:

1'. $\mathrm{Np} = (\mathrm{N}+1) - [(\mathrm{N}+1) \times (\mathrm{N}+1)]$.

6-11. Ajoutez l'Hp. $a, b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N}$.

12. Au lieu de $b - \varepsilon\, \mathrm{N}\, a$ lisez $b \,\varepsilon\, (\mathrm{N}+1) - \mathrm{N}\, a$.

25'. Au lieu de sim lisez Sim.

31-34. Supprimez. [Même remarque]

§ 6.

2. Au lieu de $2\,\mathrm{N}+1$ lisez $2\,\mathrm{N}-1$.

Ajoutez:

3'. $a \,\varepsilon\, \mathrm{N}^2 . = : x \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . \supset_x . \mathrm{mp}\,(x, a) \,\varepsilon\, 2\,\mathrm{N}_0$.

19. Au lieu de sim lisez Sim. (bf

IV.

Pag. 53, 54, 55, 56 dans le titre. Au lieu de VI lisez IV.

§ 1.

Supprimez les propositions 14-20.

§ 3.

25, 26. **[1 . 4 . 6]** au lieu de **[6]**.

27, 29. **[1 . 4 . 5 . 6]** » **[5 . 6]**. (bf

V. — § 2.

Ajoutez:

17. $u \,\varepsilon\, \mathrm{K}\,(\mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota -\infty) . \infty \,\varepsilon\, u . \supset . \max u = \infty$. Def.

18. » $. -\infty \,\varepsilon\, u . \supset . \min u = -\infty$. Def.

§ 3.

Ajoutez:

3''. $x \varepsilon u . \supset . l' u \geqq x \geqq l_1 u .$

4''. $x \varepsilon u . y \varepsilon v . \supset_{x,y} . x \leqq y : \supset . l' u , l_1 v \varepsilon q . l' u \leqq l_1 v .$

8 *a*). $m \varepsilon q . \supset : l' u \leqq m . = . u \cap (m + Q) = \Lambda .$

8 *b*). » $l' u > m . = . u \cap (m + Q) -= \Lambda .$

8 *c*). » $l_1 u \geqq m . = . u \cap (m - Q) = \Lambda .$

8 *d*). » $l_1 u < m . = . u \cap (m - Q) -= \Lambda .$

16. (note) G. ASCOLI, *Atti Accademia Lincei*, a. 1875, p. 867.

§ 4.

Ajoutez:

32. $x \varepsilon q_n . \supset . El_1 x = x_1 . El_2 x = x_2 . \ldots . El_n x = x_n .$ Def.

§ 6.

5. Au lieu de $Eu \cup Lu = \Lambda$ lisez $Eu \cap Lu = \Lambda .$

§ 7.

23. Au lieu de) lisez))

Ajoutez:

31. $u \varepsilon Kq . \supset . \mathrm{Med}\, u = q \cap \overline{x \varepsilon} (y , z \varepsilon u . y \leqq x \leqq z . -=_{y,z} \Lambda) .$ Def.

32. $u \varepsilon Kq_n . \supset . \mathrm{Med}\, u = q_n \cap \overline{x \varepsilon} [a \varepsilon q_n . \supset_a . a|x \varepsilon \mathrm{Med}\, (a|u)] .$ Def.

33. » $. \supset . I\, \mathrm{Med}\, u = \mathrm{med}\, u .$ (p

VI. — § 1.

Ajoutez:

11'. $u \varepsilon KK . u \sim N : v \varepsilon u . \supset_v . v \sim N .\because. \supset . \cup ' u \sim N .$ CANTOR, III, p. 313.

15'. $n \varepsilon N . u \cap D^n u = \Lambda . \supset . u \sim N .$

29. Au lieu de $\supset :$ lisez $\supset : w \varepsilon Kq .$

Ajoutez:

30'. $u \varepsilon (Kq)\, \mathrm{Contin} . a , b \varepsilon u . \supset . a \vdash b \supset u .$ JORDAN, LXIX, n. 34.

§ 2.

Ajoutez :

1'. $u , v \,\varepsilon\, \mathrm{K} . \supset . \mathrm{Nc}`u > \mathrm{Nc}`v . = \therefore u -= v : w \supset u . w \backsim v . -=_w \Lambda$:. Def.

2'. $a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} . \supset : a > b . = . b < a$. Def.

2''. $a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} . \supset : a = b . \cup . a > b . \cup . a < b$. CANTOR, III, p. 311.

6'. $a \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} . \supset_a : b \,\varepsilon\, \mathrm{Nc} . b > a . -=_b \Lambda$. CANTOR, LXVI.

9'. $u \,\varepsilon\, \mathrm{Kord} . \mathrm{num}\, u \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . u \,\varepsilon\, \mathrm{Kbord}$.

18'. $u = \Lambda . \supset . \mathrm{Ntrasf}`\, u = 0$. Déf.

18''. $\mathrm{N}_0 \supset \mathrm{Ntrasf}$.

9. Au lieu de $:: x \,\varepsilon\, u . \supset_x$ lisez $:: x \,\varepsilon\, u . u \,\mathrm{S}\, y . -=_y \Lambda . \supset_x$.

10. Au lieu de $f \,\varepsilon\, (v \,\mathrm{f}\, \mathrm{ord}\, u) . -=_f \Lambda$ lisez $. (v \,\mathrm{f}\, \mathrm{ord}\, u) -= \Lambda$.

22. Supprimez Def.

§ 3.

Ajoutez:

0. $u \frown D^{\omega} u = \Lambda . \supset . u \backsim \mathrm{N}$. CANTOR, XII, p. 375.

0'. $D^{\omega} u \backsim \mathrm{N} . \supset . u \backsim \mathrm{N}$. Ib.

Liste bibliographique (pag. 36).

Ajoutez:

XXXVI *bis*. S. PINCHERLE. *Alcune osservazioni sugli ordini d'infiniti delle funzioni*. Memorie dell'Acc. di Bologna, Serie IV, t. V, 1884, p. 739-750.

G. VIVANTI.

VII. — § 1.

Pag. 77, titre. Au lieu de VI lisez VII.

Ajoutez:

6. $\mathrm{Hp} . v \,\varepsilon\, \mathrm{Kq} . \mathrm{l}' v = \infty . \supset :: y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset \therefore y \,\varepsilon\, \lim f x . = : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . a \,\varepsilon\, v . \supset_{h,a} .$
$f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \frown (y - h) \vdash\!\dashv (y + h) -= \Lambda$.

7. » » » $. \supset \therefore \infty \,\varepsilon\, \lim f x . = : m \,\varepsilon\, \mathrm{Q} , a \,\varepsilon\, v . \supset_{m,a} .$
$f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \frown (m + \mathrm{Q}) -= \Lambda$.

8. » » » $. \supset \therefore -\infty$ » »
$f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \frown (m - \mathrm{Q}) -= \Lambda$.

23. $m \,\varepsilon\, \mathrm{q} . m > \mathrm{l}' \lim f x . \supset \therefore a \,\varepsilon\, \mathrm{q} : x \,\varepsilon\, u . x > a . \supset_x . f x < m : -=_a \Lambda$.

24. » $. m < \mathrm{l}_1$ » » $f x > m$ » .

25. $m \varepsilon \mathrm{q} . a \varepsilon \mathrm{q} : x \varepsilon u . x > a . \supset_x . fx < m : \supset . \mathrm{l}' \lim fx \leq m$.
26. » » » » $>$ » $\supset . \mathrm{l}_1 \lim fx \geq m$.

23-24. PEANO, *Sur la définition de la limite d'une fonction* (American Journal of Math., t. XVII, a. 1894, pag. 56).

25, 26. PEANO, *Estensione di alcuni Teoremi di Cauchy* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXX, a. 1894).

14. Au lieu de $h \varepsilon \mathrm{q}$ lisez $h \varepsilon \mathrm{Q}$.
21. Au lieu de $D \lim fx$ lisez $D(\mathrm{q} \frown \lim fx)$.
32. Au lieu de $: a \varepsilon \mathrm{q} . \supset$ lisez $: a \varepsilon \mathrm{q} . \supset_a$.

Ajoutez :
34. $\infty \varepsilon \lim fx . = : a \varepsilon \mathrm{q} . \supset_a . \mathrm{l}' f[u \frown (a + \mathrm{Q})] = \infty$.
35. $\infty - \varepsilon \lim fx . = : a \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{l}' f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \varepsilon \mathrm{q} . - =_a \Lambda$:
36. $- \infty \varepsilon \lim fx . = : a \varepsilon \mathrm{q} . \supset_a . \mathrm{l}_1 f[u \frown (a + \mathrm{Q})] = - \infty$.
37. $- \infty - \varepsilon \lim fx = : a \varepsilon \mathrm{q} . \mathrm{l}_1 f[u \frown (a + \mathrm{Q})] \varepsilon \mathrm{q} . - =_a \Lambda$.

34-37. PEANO, *Lezioni di analisi*, a. 1893, t. I, pag. 266.

§ 2.

22, 23. Au lieu de u lisez N.

Note. 22-23. Ajoutez: LA MAESTRA, *Sulle successioni* (Giornale di Matematica, t. 28, pag. 241).

Ajoutez :
24. $m \varepsilon \mathrm{N} . v_1, v_2, \ldots v_m \varepsilon \mathrm{K\,N} . \mathrm{N} = v_1 \cup v_2 \cup v_3 \ldots \cup v_m : r \varepsilon \mathrm{Z}_m . \supset_r . \mathrm{l}' v_r = \infty .$ $\lim_{x, v_r, \infty} fx \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty \cup \iota - \infty .\because \supset . \lim_{x, \mathrm{N}, \infty} fx = \lim_{x, v_1, \infty} fx \cup$ $\lim_{x, v_2, \infty} fx \cup \ldots \cup \lim_{x, v_m, \infty} fx$. [Hp.§1 P5 , 33 , 35 , 37:$\supset$.P24]
25. $v \varepsilon (\mathrm{KN}) f \mathrm{N} . \mathrm{N} = \cup ' v_\mathrm{N} : r \varepsilon \mathrm{N} . \supset_r . \mathrm{l}' v_r = \infty . \lim_{x, v_r, \infty} fx \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty$ $\cup \iota - \infty : w = \overline{y \varepsilon} (r \varepsilon \mathrm{N} . \supset_r . y = \lim_{x, v_r, \infty} fx) .\because \supset . \lim_{x, \mathrm{N}, \infty} fx = Cw$.
[Hp.§1 P5 , 21 , 33 , 35 , 37 : $\supset$. P25]

§ 3.

Ajoutez:
33'. $\lim - fx = - \lim fx$.
44. Au lieu de $\pm \infty \varepsilon \lim$ lisez $\infty \varepsilon \lim \mathrm{mod}\, fx$.

Au lieu de 67, 68, 69, 70, 71 lisez:
69. $a \varepsilon 1 + \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Log}_a \infty = \infty . \mathrm{Log}_a 0 = - \infty$. Def.
70. $a \varepsilon 1 - \mathrm{Q} . \supset . \mathrm{Log}_a \infty = - \infty . \mathrm{Log}_a 0 = \infty$. Def.

$f \varepsilon \mathrm{Q f} u . \supset :$

71. $a \varepsilon \mathrm{Q} - \iota 1 . \supset . \lim \mathrm{Log}_a f x = \mathrm{Log}_a \lim f x .$

72. Au lieu de $= \mathrm{Log}_a \lim f x$ lisez $\varepsilon \mathrm{q}$.

§ 4.

Au lieu des P1-8 lisez:

$f, g \varepsilon \mathrm{q f N} . \lim = \lim_{x, \mathrm{N}, \infty} . \supset :$

1. $\lim [f(x+1) - fx] \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty \cup \iota - \infty . \supset . \lim (fx)/x = \lim [f(x+1) - fx] .$

2. $\lim f x \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty \cup \iota - \infty . \supset . \lim \frac{\Sigma f x}{x} = \lim f x .$ $\left[\binom{\Sigma f}{f} \mathrm{P1} = \mathrm{P2} \right]$

2 a). $\mathrm{l}' \lim \frac{\Sigma f x}{x} \leqq \mathrm{l}' \lim f x .$

2 b). l_1 » $\geqq \mathrm{l}_1$ »

2 c). $\lim \frac{\Sigma f x}{x} \supset \mathrm{Med} \lim f x .$

2 d). $\lim \frac{f x}{x} \supset \mathrm{Med} \lim [f(x+1) - f x] .$

2 e). $y \varepsilon \mathrm{Med} \lim \frac{\Sigma f x}{x} . y \,\text{-}\varepsilon \lim \frac{\Sigma f x}{x} . \supset . \infty, -\infty \;\varepsilon \lim f x .$

2 f). $\infty \,\text{-}\varepsilon \lim f x . \cup . -\infty \,\text{-}\varepsilon \lim f x . \supset . \lim \frac{\Sigma f x}{x} = \mathrm{l}_1 \lim \frac{\Sigma f x}{x} \vdash \mathrm{l}' \lim \frac{\Sigma f x}{x} .$

3. $\lim f x , \lim g x = 0 . g \varepsilon \mathrm{dec} . \lim [f(x+1) - fx]/[g(x+1) - gx] \varepsilon \mathrm{q} . \supset .$
$\lim fx/gx = \lim [f(x+1) - fx]/[g(x+1) - gx] .$

3 a). $\lim g x = \infty . g \varepsilon \mathrm{cres} .$ » » »

3 b). $g \varepsilon \mathrm{Q f N} . \Sigma_1^\infty gx = \infty . \supset . \lim \frac{f1.g1 + f2.g2 + \ldots + fx.gx}{g1 + g2 + \ldots + gx} \supset \mathrm{Med} \lim fx .$

3 c). » » $. \supset . \lim \frac{\Sigma f x}{\Sigma g x} \supset \mathrm{Med} \lim \frac{f x}{g x} .$

3 d). $g \varepsilon (\mathrm{Q f N}) \mathrm{cres} . \lim g x = \infty . \supset . \lim \frac{f x}{g x} \supset \mathrm{Med} \lim \frac{f(x+1) - fx}{g(x+1) - gx} .$

4. $g \varepsilon \mathrm{QfN} . \Sigma_1^\infty gx = \infty . \lim \frac{f x}{g x} \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty \cup \iota - \infty . \supset .$
$\lim \frac{f1 + f2 + \ldots + fx}{g1 + g2 + \ldots + gx} = \lim \frac{f x}{g x} .$ $\left[\binom{\Sigma f , \Sigma g}{f \quad g} \mathrm{P3}\, a) = \mathrm{P4} \right]$

4 a). » » $. \lim fx \varepsilon \mathrm{q} \cup \iota \infty \cup \iota - \infty . \supset .$
$\lim \frac{f1 . g1 + f2 . g2 + \ldots + fx . gx}{g1 + g2 + \ldots + gx} = \lim f x .$ $\left[\binom{fg}{f} \mathrm{P4} = \mathrm{P4}\, a) \right]$

5. $f \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \lim f(x+1)/fx \,\varepsilon\, \mathrm{Q}_0 \cup \iota\infty \,.\, \supset .\, \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{f(x+1)}{fx}$.

6. $f \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \lim fx \,\varepsilon\, \mathrm{Q}_0 \cup \iota\infty \,.\, \supset .\, \lim \sqrt[x]{f1 \,.\, f2 \ldots fx} = \lim fx$.

7. $g \,\varepsilon\, (\mathrm{Q\,f\,N})\,\mathrm{dec} \,.\, \lim g x = 0 \,.\, \Sigma_1^\infty g x = +\infty \,.\, \lim \frac{f1+f2+\ldots+fx}{x} \,\varepsilon\mathrm{q}.$

$\supset . \lim \frac{f1 \,.\, g1 + f2 \,.\, g2 + \ldots + fx \,.\, gx}{g1 + g2 + \ldots + gx} = \lim \frac{f1+f2+\ldots+fx}{x}$.

8. $\lim fx \,,\, \lim gx \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \lim \frac{f1 \,.\, gx + f2 \,.\, g(x-1) + \ldots + fx \,.\, g1}{x}$

$= \lim fx \times \lim gx$.

8 *a*). $f \varepsilon \mathrm{q\,f\,N} \,.\, m \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, v_1, v_2, \ldots v_m \,\varepsilon\, \mathrm{K\,N} \,.\, \mathrm{N} = v_1 \cup v_2 \cup \ldots \cup v_m : r,s \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m \,.$
$r -= s \,.\, \supset_{r,s} .\, v_r \cap v_s = \Lambda : r \,\varepsilon\, \mathrm{Z}_m \,.\, \supset_r .\, \mathrm{l}'\, v_r = \infty \,.\, \lim_{x, v_r, \infty} fx \,\varepsilon\, \mathrm{q}.$
$\lim_{n, \mathrm{N}, \infty} \frac{\mathrm{num}\,[v_r \cap (n - \mathrm{N}_0)]}{n} \,\varepsilon\, \mathrm{q} : \supset .$
$\lim \frac{fx}{x} = \sum_{r=1}^{r=m} \lim_{x, v_r, \infty} fx \times \lim_{n, \mathrm{N}, \infty} \frac{\mathrm{num}\,[v_r \cap (n - \mathrm{N}_0)]}{n}$.

8 *b*). $f \varepsilon \mathrm{Q\,f\,N} \,.\, \supset .\, \lim \sqrt[x]{f1 \,.\, f2 \ldots fx} \supset \mathrm{Med} \lim fx$.

8 *c*). « $\supset .\, \lim \sqrt[x]{fx} \supset \mathrm{Med} \lim \frac{f(x+1)}{fx}$.

§ 4. 1, 5. CAUCHY, *Analyse algébrique,* a. 1821, pag. 48, 53.
2, 6, 7, 8. CESÀRO, *Analisi algebrica*, Torino 1894, pag. 99, 105.
2 *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), 4 *b*), *c*), *d*), 8 *b*), *c*). PEANO, *Estensione*, ecc.
3, 3 *a*). STOLZ, *Ueber die Grenzwerthe von Quotienten* (Math. Ann., Bd. XIV).
4 *d*). STOLZ, *Vorlesungen über Arithmetik*, pag. 340.
8 *a*). CESÀRO, *Teixeira J.,* t. 7, a. 1887, p. 171; *Analisi algebrica,* pag. 101.

14. Ajoutez l'Hp: $\lim fx \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset .$
22. Au lieu de $r \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})$ lisez $r \,\varepsilon\, (-1 + \mathrm{Q}) \cap (1 - \mathrm{Q})$.
31. Lisez ..... $\supset .\, \lim \frac{fx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \lim \frac{f(x+1) - fx}{x^n}$.

Note. — 31-33. Ajoutez : CAUCHY, l. c., pag. 48.

33. Au lieu de $\lim \frac{f(x+1)}{fx} \varepsilon \mathrm{q}$ lisez $f \varepsilon \mathrm{Q}\, \mathrm{f}\, \mathrm{N}. \lim \frac{f(x+1)}{f(x)} \varepsilon \mathrm{Q}_0 \cup \iota\, \infty$.

34. À supprimer.

Ajoutez

18, 19, 20 (note). LAISANT, *Ass. fr. Congrès d'Alger*, a. 1881. (b

VIII. — § 2.

16. Supprimez l'Hp $u \varepsilon \mathrm{Q}\, \mathrm{f}\, \mathrm{N}$.

§ 3.

54. Au lieu de $. \supset .$ lisez $: \supset .$

55. Au lieu de $— . \supset : — . — . \supset_n . — : —$
lisez $— . \supset .\because. — : — . \supset_n . — : —$

56. Au lieu de $— . — . \supset_n . — . — . \supset . —$
lisez $— : — . \supset_n . — : — : \supset . —$

58. Au lieu de $. \supset .$ lisez $: \supset .$

59. Au lieu de $— : — . \supset_r . — . — . \supset . —$
lisez $— : — . \supset_r . — : — : \supset . —$

§ 4.

10, 11, 12, 13. Au lieu de $. \supset .$ lisez $: \supset .$ (g

IX. — § 1.

1. Au lieu de $... + a_m$ lisez $... + a_n$.

Ajoutez :

16'. $x \varepsilon \mathrm{conj}\, y . \supset . y \varepsilon \mathrm{conj}\, x$.

16''. $x \varepsilon \mathrm{conj}\, y . y \varepsilon \mathrm{conj}\, z . \supset . x \varepsilon \mathrm{conj}\, z$. (f

NOTES SUR LA I PARTIE.

§ 1.

Le signe ɔ signifie « on déduit ».

Le signe ∩, toujours sousentendu, signifie « et ».

Ces signes ne sont pas définis; ils représentent des idées irréductibles. Par eux on définit le signe = (§ 1 P3).

Les lettres a, b, c ... désignent des propositions quelconques.

Il faut connaître l'usage des points (Introduction, § 10).

Avec ces conaissances on peut lire toutes ces formules. Pour lire aussi les démonstrations, il faut savoir que

Pp signifie « proposition primitive », ou qu'on ne démontre pas.

Def » « définition ».

Il faut aussi connaître la notation de la substitution $\binom{a', b'}{a\ , b}$, les abréviations Hp et Ts (hypothèse et thèse) et P (proposition).

La démonstration d'une formule de logique, c'est-à-dire d'une règle de raisonnement, n'a pas, en général, pour but de nous assurer sur la vérité de cette règle, mais bien de la décomposer dans les règles de raisonnements qu'on a appellées primitives, en nombre de 9.

1, 5. LEIBNITII, *Opera philosophica* (Edit. J. E. Erdmann, Berolini a. 1840, pag. 98).

Propositiones per se verae: 1) a est a; 2) ab est a.

6. LEIBNIZ, id. pag. 95.

« Si idem secum ipso sumatur nil constituitur novum ».

G. BOOLE, *Mathematical Analysis of Logic*, a. 1847, pag. 17; *The laws of thought*, a. 1854, pag. 31.

8. LEIBNITII, *Opera philosophica*, a. 1840, pag. 98:

Transpositio literarum in eodem termino nihil mutat, ut ab coincidet cum ba, seu animal rationale et rationale animal.

BOOLE, ib.

12. CH. PEIRCE, *On the Algebra of Logic*. American Journal of Mathematics, t. 3, a. 1880, t. 4, a. 1884.

13. ARISTOTELIS, *Analyt. Pr.*, L. I, cap. IV:

Εἰ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Β, καὶ τὸ Β κατὰ παντὸς τοῦ Γ, ἀνάγκη καὶ τὸ Α κατὰ παντὸς τοῦ Γ κατηγορεῖσθαι.

30. LEIBNIZ, id., pag. 98.

Ex quotcumque propositionibus fieri potest una, additis omnibus subjectis in unum subjectum et omnibus praedicatis in unum praedicatum. Ut a est b, c est d, et e est f, inde fiet ace est bdf.

H. MC COLL, *The Calculus of equivalent statements,* Proceedings of the London Math. Society, a. 1878, t. X, pag. 16.

33. LEIBNITII, id. *Difficultates quaedam logicae*, pag. 102:

« Omne a est b, id est: equivalent a et ab ».

36. LEIBNIZ, id., pag. 98-99.

Ex quacunque propositione cujus praedicatum est ex pluribus terminis compositum possunt fieri plures, quarum qualibet idem quod ante habet subjectum, sed loco praedicati habet aliquam prioris praedicati partem; a est bcd ergo a est b, et a est c, et a est d.

H. MC COLL, ib.

39. PEIRCE, id. t. 3, pag. 24.

§ 2.

$-a$ signifie « non a ». L'idée de la négation est primitive et déterminée par deux propositions primitives P1, 3. On définit en conséquence le signe $\cup$ (P6), et le signe A (§ 3 P1).

3. J. A. SEGNER, *Specimen logicae universaliter demonstr.*, 1740:

« Si x ponatur pro *non triangulo,* $-x$ erit *triangulum* » (J. VENN, *Symbolic Logic*, 1881, pag. 184).

6, 7, 8. AUG. DE MORGAN, *On the syllogism,* Cambridge Phil. Transactions, 1858.

13. LEIBNIZ, id., pag. 96:

Constitutum ex contentis inest constituto ex continentibus. Si a est in m, et b est in n erit $a+b$ in $m+n$.

16. LEIBNIZ, id., pag. 96:

Si quid additur ei cui inest nil constituitur novi. Si b est in a erit $a+b=a$.

Conversum theorematis praecedentis: Si quid addendo alteri nil constituitur, ipsum alteri inest. Si $a+b=a$ tum b erit in a.

17. LEIBNIZ, id., pag. 96:

Cui singula insunt, etiam ex ipsis constitutum inest. Si a est in c et b est in c etiam $a+b$ erit in c.

22. BOOLE, *Math. anal.*, pag. 16; *The laws of thought,* pag. 33.

24-29. CH. PEIRCE, *Three papers on Logic,* Journal of speculative Philosophy, a. 1868; American Journal of Math., t. 3, a. 1880.

SCHRÖDER, *Algebra der Logik,* t. I, a. 1890, p. 362, 382; t. II, a. 1891, p. 33.

30. SCHRÖDER, id., I, p. 383.

31. VAILATI, Rivista di Matematica, 1891, p. 103.

32-34. BOOLE, id.

35. SCHRÖDER, id., pag. 308.

36, 37. MC COLL, id., P13, 11.

§ 3.

1. SCHRÖDER, *Algebra der Logik,* I, pag. 302.

2, 4. Id., pag. 271.

3. Id., pag. 188.

7. Id., pag. 190.

8. LEIBNITII, *Difficultates quaedam logicae* (Ed. Erdmann, p. 102): « Omne a est b seu a non b est non ens. Nullum a est b seu ab est non ens ».

9. G. BOOLE, *The laws of thought.*

15-18. BOOLE, *The laws of thought.*

SCHRÖDER, *Algebra der Logik,* I, p. 446; II, p. 200 e segg.

19. A. DE MORGAN, *Formal Logic,* 1847, p. 278.

22. E. SCHRÖDER, *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* t. II, 1891, p. 280-1.

21-23, J. HAUBER, *Scholae logico-mathematicae,* 1829.

24-30, JEVONS, *Pure logic,* a. 1864.

SCHRÖDER, *Algebra der Logik,* I, p. 381.

§ 4.

Le signe K signifie « classe ».
» ε » « est un ».

§ 5.

Le signe / signifie « fonction ». Dans l'Introduction et dans la V partie et suivantes on l'a changé en f.

3. R. DEDEKIND. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, 1888, n. 21 — 5. Id., n. 22 — 9. Id., n. 23 — 10. Id., n. 24 — 12-14. Id., n. 25 — 21. Id., n. 26 — 24. Id., n. 27 — 25. Id., n. 28 — 26. Id., n. 29 — 28. Id., n. 31.

Rivista di Matematica, 1891, p. 24-31, 182-184; a. 1893, p. 4, 5.

NOTES SUR LA II PARTIE.

§ 2.

6. EUCLIDES (*Opera omnia,* edidit Heiberg, Lipsiae), VII, 16.

8, 46. EUCLIDES, II, 1. — ID. V, 1, 2.

18-20. DIOPHANTUS, *Arith.* I, 9 :

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα, ποιεῖ ὕπαρξιν. Λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν, ποιεῖ λεῖψιν.

36. EUCLIDES, V, 16. — 37. ID. 18. — 39. ID. 12. — 40. ID. 22. — 41. ID. 23. — 42. ID. 24.

§ 3.

7. EUCLIDES, IX, 11. — 8. ID. VIII, 13; IX, 3, 9. — 9. ID. VIII, 11, 12; IX, 4.

§ 4.

4. EUCLIDES, II, 4.

6. EUCLIDES, II, 9.

7. EUCLIDES, II, 5.

8. JORD. NEMORARIUS, a. 1200 (V. M. CANTOR, *Geschichte d. Math.,* II, p. 59).

47. DIOPHANTUS, *Arith.* III, 22. — 48. ID. II. 8, 9.

52. EULER, *Demonstratio theoremi Fermatiani* (Novi Comm. Petrop. t. V, a. 1760, p. 53-54).

§ 5.

24. EUCLIDES, V, 25.

25. CHUQUET, a. 1484 (V. M. CANTOR, II, p. 322).

§ 6.

21. EUCLIDES, X, 42. — 22, 23. ID. X, 54-59, 91-96.

§ 7.

21-31. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, et expeditissimi explicatio.* Authore ac Inventore IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, etc. Scoto. Edinburgi, ex officina Andreæ Hart, Bibliopólæ CIↃ.DC.XIV.

Pag. 20.

Ex his praelibatis judicent eruditi quantum emolumenti adferent illis logarithmi: quandoquidem per eorum additionem multiplicatio, per substractionem divisio, per bipartitionem extractio quadrata, per tripartitionem cubica, et per alias faciles prostaphaereses omnia graviora calculi opera evitantur.

$$\left[\log \operatorname{nep} x = -10^7 \log_e \left(\frac{x}{10^7}\right)\right]$$

§ 8.

6. DIOPHANTUS, I, 1. — 7. ID. I, 2, 4. — 8. ID. I, 16. — 9. ID. I, 18, 19.

23. EUCLIDES, II, 5, 6. Cfr. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Libro I, pag. 44, 45.

LEONARDUS PISANUS, de filiis Bonaccii, *Liber abbaci*, 1202. (Publicato da B. Boncompagni, pag. 497).

(Si) volueris invenire quantitatem census [x^2], *qui cum datis radicibus* [$+px$] *equetur numero dato* [$=-q$], *sic facias: accipe quadratum medietatis radicum* [$p^2/4$], *et adde eum super numerum datum* [$p^2/4-q$]; *et eius, quod pervenerit, radicem accipe* [$\sqrt{p^2/4-q}$]; *de qua numerum medietatis radicum tolle* [$\sqrt{p^2/4-q}-p/2$]; *et quod remanserit erit radix quesiti census.*

24. EUCLIDES, VI, 28, 29.

25. DIOPH. I, 30. — 26. ID. I, 31, 33. — 27. ID. I, 32.

28. BACHET, *Commentaria in Diophantum,* I, 33, quaestio 1ª.

§ 9.

7. CAUCHY, *Analyse algébr.*, c. 7 (1821).

§ 10.

1-2. EUCLIDES, IX, 35.

3. NEWTON, *Epistola ad D. Henricum Oldenburg*, 13 junii 1676.

5, 14. PYTHAGORAS (V. M. CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, I, 135).

6. ARCHIMEDES, *Spiral.* 10.

7. NICOMACUS, *Arith.* II, 20.

8, 9. FERMAT. JAC. BERNOULLI, *Ars conjectandi*, p. 27.

10-12. FERMAT, *Oeuvres*, I, 341.

10. ARIABHATTAS, 21.

NOTES SUR LA III PARTIE.

§ 1.

29. EUCLIDES, VIII, 6, 7, 14-17, 22-25.

§ 3.

6-7. EUCLIDES, VII, 1-2.

9. EUCLIDES, VII, 2:

. . . *ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.*

13. EUCLIDES, VII, 3. — 16. ID. VII, 25, 27; VIII, 2, 3. — 17. ID. VII, 20-21. — 19. ID. VII, 23, 24. — 19'. ID. VII, 26.

§ 4.

5. EUCLIDES, VII, 34. — 8, 9. ID. VII, 35. — 11. ID. VII, 36, 37.

§ 5.

4. EUCLIDES, VII, 31-32. — 6. ID. VII, 29. — 9. ID. VII, 30. — 10. ID. IX, 12. — 11. ID. IX, 13.

12. FERMAT, *Opera Math.*, Tolosae 1679. — LEIBNIZ, *Mathematische Schriften*, ed. Gerhardt, vol. VII, pag. 154. — EULER, *Comm. Petrop.*, t. 8, p. 143, a. 1736; *N. C. Petrop.* t. 8, p. 70.

13. WILSON; V. WARING, *Med. Alg.* 1782, p. 380; LAGRANGE, *Berlin, Mém.* a. 1771; EULER, *Opusc. anal.* t. I, p. 329; Petrop. a. 1783.

15, 16. EUCLIDES, IX, 20.

17, 18. LEGENDRE, *Théorie des nombres*, Introduction, N. XX.

NOTE SUR LA IV PARTIE.

V. Rivista di Matematica, t. III, a. 1893, pag. 76-101.

NOTE SUR LA V PARTIE.

V. Rivista di Matem., t. IV, a. 1894, pag. 33.

NOTE SUR LA VI PARTIE.

V. Rivista di Matem., t. IV, pag. 135.

NOTE SUR LA VII PARTIE.

V. Rivista di Matem., t. IV, pag. 161.

NOTE SUR LA VIII PARTIE.

V. Rivista di Matem., t. IV, pag. 163.

NOTE SUR LA IX PARTIE.

V. Rivista di Matem., t. V, a. 1895, pag. 1.

TABLE DES SIGNES

(Intr signifie Introduction au Formulaire; I, II, III, ... indiquent les parties du Formulaire, § le paragraphe, P la proposition.)

Signes de forme spéciale.

$\cap$ *et.* Signe de la multiplication logique; on le place toujours entre deux propositions ou entre deux classes (Intr § 6, § 9; I § 1; I § 4 P3).

$\cup$ *ou.* Signe de l'addition logique; on le trouve toujours entre deux propositions (I § 2 P6) ou deux classes (I § 4 P4).

- *non.* On l'écrit devant une proposition (Intr § 9, I § 2), ou d'une classe (Intr § 6, I § 4 P5), ou d'un signe de relation ε, =, etc. (Intr § 30).

o signe de la disjonction complète (Intr § 8, I § 3 P24). Il ne figure pas dans les formules de mathématiques.

$\cap$' *la classe commune à*; on le trouve devant une classe de classes. (V § 1 P9, Intr § 21).

$\cup$' *la plus petite classe contenant les*; on le trouve devant une classe de classes (V § 1 P10, Intr § 21).

Ɔ *on déduit,* entre deux propositions (Intr § 9, I § 1).
est contenu, entre deux classes (Intr § 6, I § 4 P1).

= *est égal.* Il figure entre deux individus, ou deux propositions (Intr § 9, I § 1 P3), ou deux classes (Intr § 6, I § 4 P2).

Λ *absurde* ou *rien* (Intr § 6, 9, I § 3 P1, I § 4 P6).

+ *plus.* On le trouve entre deux nombres réels (II § 1), ou imaginaires (II § 9 P5), entre un nombre fini et l'infini ou deux infinis (V § 1 P6, V § 3 P7), entre deux complexes du même ordre (V § 4 P4), entre deux nombres cardinaux finis ou infinis (V § 5 P23-25, VI § 2 P3), ou entre deux nombres transfinis (VI § 2 P24, 42); on le trouve aussi entre des classes de ces nombres (Intr § 3).

— *moins.* Voir +. Le même signe, au-dessus d'une lettre, ou d'une expression, est le signe *d'inversion* (Intr § 17, 27, I § 5 P21).

× *multiplié par.* Il se place entre deux nombres réels (II § 2), ou imaginaires (II § 9), entre un nombre fini et l'infini, ou deux infinis (V § 3 P8), entre un q et un q_n (V § 4 P6), entre des nombres cardinaux ou ordinaux finis ou infinis (V § 5 P26-30, VI § 2 P4, 26, 43). Il est en général sous-entendu.

| *divisé par*, entre deux nombres. Voir ×. Devant un nombre seul signifie *le réciproque de* (Int § 22 , II § 2 P21). Dans les parties I-IV il a aussi la signification du signe f.

√ *racine arithmétique*. Il se place devant un nombre positif (II § 6).

√* *racines algébriques*. Il se place devant un nombre réel ou imaginaire (II § 9 P11).

! *factorielle* (III § 1 P30, 31).

> *est plus grand que*. Il se place entre deux nombres réels finis (II § 5), entre un nombre fini et l'infini (V § 1 P6 , § 3 P7), ou deux transfinis (VI § 2 P13).

< *est plus petit que*. Voir >.

ʝ *fonction*. Voir f.

' ‘ Signes qui forment des fonctions (Intr § 21). Voir ∪‘, ∩‘, Nc‘, Ω‘, etc.

a⊢⊣b , a−b , a⊢b , a⊣b *intervalles de a à b*, avec, ou sans les extrêmes (Intr § 2 , V § 4 P41-45).

| Signe du produit intérieur de deux nombres complexes du même ordre (V § 4 P24).

$\binom{b}{a}$ Signe de la substitution de *b* à *a* (Intr § 28).

∽ *est semblable*, ou *de la même puissance*; on l'écrit entre deux classes (VI § 1 P1).

II *deuxième classe de nombres transfinis* (VI § 2 P27).

| , ↑, ↓ (Intr § 32-33). Ils ne figurent pas dans le Formulaire.

Lettres grecques.

Δ *discriminant* (IX § 11 P7).

ε *est* (Intr § 6).

θ *l'intervalle* 0⊢⊣1 (Intr § 2 , V § 4 P46).

ι *égal* (Intr § 31 , I § 4 P13-16 dans les additions).

π *a* , où *a* ε N , signifie *nombre non supérieur à a , et premier avec a* (III § 6 P11) (Notation adoptée seulement dans ce §).

π (dans la partie IX) *est premier avec*; relation entre des alg (IX § 3 P4).

Π *produit* (Intr § 25 , II § 2 P43 , VIII § 1 P2). Voir Σ.

Σ *somme* (Intr § 25). Si *f* ε q f Z_m , où *m* ε N , $\Sigma_1^m f = \Sigma_{r=1}^{r=m} fr$ indique la somme $f1 + ... + fm$ (II § 1 P52); on a aussi l'expression $\Sigma_p^q f = \Sigma_{r=p}^{r=q} fr$ (II § 1 P58). Si *u* ε q f N , Σ *u* est une nouvelle q f N (VIII § 1 P1). $\overline{\Sigma}$ est l'opération inverse de Σ (VIII § 1 P4).

φ *a* , où *a* ε N , *le nombre des* π *a* (III § 6 P12).

Φ (*m* , *n*) (VI § 2 P47).

ω *le plus petit nombre transfini supérieur aux* N (V § 5 P21, VI § 2 P20).
Ω (dans la partie VI) *le plus petit nombre transfini supérieur aux nombres* II (VI § 2 P37).
Ω (dans la partie IX) *corps d'algébriques* (IX § 4 P1).
Ω' *corps de* (devant une classe d'alg) (IX § 4 P7, 8).
Ω_n *corps de degré n* (IX § 5 P4).
Ω norm *corps normal* (IX § 4 P23).

Lettres latines.

a. *an* (dans les citations).
alg = N alg, *nombre algébrique* (IX § 1 P3).
alg_n *nombre algébrique d'ordre n* (IX § 1 P10).
alg dec *algébrique décomposable* (IX § 11 P24).
alg id *algébrique idéal* (IX § 17 P31).
alg pr *algébrique premier* (IX § 11 P26).
alg' *algébrique par rapport à* (IX § 4 P5).
A *nombre algébrique entier* (IX § 2 P1).
B *base* (IX § 5 P1, § 10 P3).
B irr *base irréductible* (IX § 10 P6).
B int *base entière de* (IX § 6 P7).
c *contient, est conséquence*; jamais adopté. Voir ɔ.
C fermé (*clausus*). On l'écrit devant un ensemble de q_n (V § 7 P1).
$coeff_0$, $coeff_1$, ... les coefficients d'une fonction entière (IX § 1 P19).
conj *conjugué,* devant un alg ou une classe de alg (IX § 1 P12, § 4 P16).
conj' *corps conjugué,* devant un corps d'alg (IX § 4 P18).
Connex *connexe*; propriété des Kq_n (VI § 1 P22)
Contin *continue*; propriété des Kq_n (VI § 1 P24).
contin *continue*; propriété des fonctions.
cres = cresc *croissante*; propriété des fonctions (VII § 2 P11).
$cres_0$ *croissante, lorsqu'elle varie,* propriété des fonctions (VII § 2 P12).
D (*a*, *b*) *le plus grand diviseur commun des nombres a et b* (III § 3 P1).
D dérivé; on l'écrit devant une Kq_n (V § 5 P1).
D' dérivé à droite (V § 5 P41).
D_1 *dérivé à gauche* (V § 5 P42).
Def, ou def, *définition* (Intr § 36).
dec = decr *décroissante*; propriété des fonctions (VII § 2 P13).
dec_0 *décroissante, lorsqu'elle varie*; propriété des fonctions (VII § 2 P14).
Det *le déterminant des*; on l'écrit devant une q f (Z_n, Z_n).
e *base des logarithmes naturels* (VII § 4 P11).
E extérieur à (une Kq_n) (V § 6 P2).

El$_r$ x, où $x \varepsilon \mathrm{q}_n$, et $r \varepsilon \mathrm{Z}_n$, signifie *l'$r^{\text{ième}}$ élément du nombre complexe x*, ou *sa $r^{\text{ième}}$ coordonnée* (V § 4 P32, dans les additions).
eq *est équivalent à,* relation entre deux idéaux (IX § 17 P1).
Exposants aux nombres (II § 3); aux signes de fonction (I § 5 P15-16, 30-31); aux nombres transfinis (V § 5 P27-30).
f *fonction.* Il figure toujours entre deux classes; à droite on a l'ensemble des valeurs de la variable indépendente, à gauche l'ensemble des valeurs de la fonction. Dans les parties I-IV on l'a écrit sous la forme ∫ (Intr § 23, I § 5).
f ord *correspondance ordonnée* (VI § 2 P8).
G (dans la partie IV) *grandeur.*
G (dans la partie IX) *fonction entière (ganze) dont les coefficients sont entiers, le premier positif, et sans diviseur commun* (IX § 1 P2).
G_n = G de degré n (IX § 1 P1).
G irr = G irréductible (IX § 1 P7).
G_n irr = G_n irréductible (IX § 1 P6).
grad *degré* (gradus) d'une G (IX § 1 P13).
H' *idéal principal de* (un corps) (IX § 12 P15).
Hp *Hypothèse.*
i = $\sqrt{-1}$ (II § 9).
I intérieur à (une Kq_n) (V § 6 P1).
id' *idéal de* (un corps) (IX § 12 P1).
id pr *idéal premier* (IX § 14 P1).
Indices aux signes ɔ, = (Intr § 13-18); à une classe de nombres (III § 5 P37).
Intr = (Introduction au Formulaire).
Inversion. Voir —.
K *classe, ou classe de* (Intr § 2).
K bord *classe bien ordonnée* (VI § 2 P9).
K ord *classe ordonnée* (VI § 2 P7).
K ord_n *classe ordonnée selon n dimensions* (VI § 2 P38).
L limite (d'une Kq_n) (V § 6 P3).
l' *limite supérieure* (d'une Kq) (V § 3 P1, 5).
l_1 *limite inférieure* (») (V § 3 P1', 5').
lim *limite* (d'une fonction) (VII § 1 P1-3).
Lettres variables (Intr § 13).
Log *logarithme* dans une base quelconque (II § 7 P21).
log *logarithme naturel* (VII § 4 P12).
m (a, b) *le plus petit commun multiple des nombres a et b* (III § 4 P1).
m voir mod.

max *le plus grand des*; il précède une Kq (V § 2 P1, 17).
med *moyen* (V § 7 P21, 23).
Med *moyen*, dans une autre signification (V § 7 P31, dans les additions).
min *le plus petit des*; il précède une Kq (V § 2 P2, 18).
$\min_1 u$, $\min_2 u$, ... *le premier, le deuxième ... des nombres u, ordonnés suivant leur grandeur* (III § 5 P35-36).
mod = m, *le module de*; il précède un nombre réel (II § 1 P41-43), ou imaginaire (II § 9 P7), ou complexe d'ordre quelconque (V § 4 P9).
Mod *module*; système de nombres algébriques (IX § 7 P1).
Mod prop (IX § 8 P64).
Mod fin, Mod fin_n (IX § 10 P1, 7).
mp (a, b) *l'exposant de la plus grande puissance de a contenue dans b* (III § 5 P19).
N *nombre entier positif* (Intr § 2).
n *nombre entier* (Intr § 2, III § 1).
N_0 *nombre entier positif ou nul* (Intr § 2, III § 1 P34).
Np *nombre premier* (III § 5 P1).
N alg = alg *nombre algébrique* (VI § 1 P8).
Nc *nombre cardinal* ou *puissance* (VI § 2 P1, 2).
Nc' *puissance de* (une classe) (VI § 2 P1, 2).
N trasf *nombre transfini* (VI § 2 P10, 11).
norm *la norme de* (un nombre algébrique ou un id') (IX § 1 P18, § 12 P5).
num *le nombre des* (Intr § 19, V § 1 P1, 2, 4).
P *proposition.*
Pp *proposition primitive* (Intr § 44).
p = pag *page* (dans les citations).
Points et parenthèses (Intr § 10).
Pi *principe d'induction*, seulement dans IV.
pd *proportionnalité directe* »
pi » *inverse* »
Puissance voir *Exposants.*
Q *nombre réel positif* (Intr § 2).
Q_0 *nombre réel positif ou nul* (Intr § 2).
q *nombre réel* (Intr § 2).
q' *nombre imaginaire* (II § 9 P3).
q_n *nombre complexe d'ordre n* (V § 4 P1, 2, 3).
quot (a, b) *le quotient* de la division de a par b (III § 2 P1).
R *nombre rationnel positif* (Intr § 2).
r *nombre rationnel* (Intr § 2).
R (b, a) (IX § 9 P3, 4).

rappr (b, a) (IX § 9 P1).
rest (a, b) *le reste* de la division de a par b (III § 2 P5).
S *est suivi par*. Ce signe se présente seulement dans VI § 2.
sim *univoque et réciproque*; propriété des fonctions (Intr § 26, I § 5 P22).
Sim *semblable*; id. (Intr § 6, I § 5 P34, dans les additions).
t. *tome* (dans les citations).
Ths ou Ts *thèse*.
Tn, Tr, Tq *théorie des nombres entiers, des nombres rationnels, des nombres réels*. On trouve ces abréviations seulement dans la IV partie.
Ty_n *type ordonné à n dimensions* (VI § 2 P39-41).
U *nombre algébrique unité* (IX § 2 P7).
v *vrai* ou *tout*. Ce signe n'est pas adopté. Voir $\wedge$.
V. ou v. *voyez* (dans les citations).
Y_α *classe bien ordonnée des nombres transfinis non supérieurs à* α (VI § 2 P16, 21).
Z_m, où $m \varepsilon \mathrm{N}$, désigne l'ensemble des nombres $1, 2, \ldots m$ (Intr §2, II §1 P51).
$\mathrm{Z}(p, q)$, où $p, q \varepsilon \mathrm{N}$, $p < q$, désigne l'ensemble $p, p+1, \ldots q$ (Intr § 2, II § 1 P56).

TABLE DES AUTEURS

TABLE GÉNÉRALE

Théorie générale des modules.

Rivista di Mathematica

NOTATIONS

DE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

G. PEANO

Professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin.

INTRODUCTION

AU

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUE

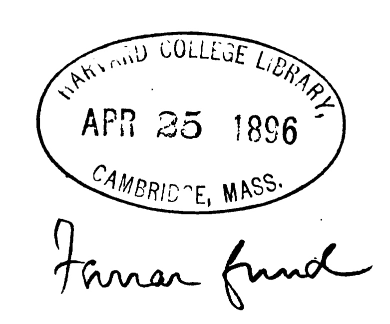
publié par la

« Rivista di Matematica »

TURIN

—

1894



Turin - Imprimerie Charles Guadagnini - 0000

NOTATIONS

DE

LOGIQUE MATHÉMATIQUE

Introduction.

§ 1. Leibniz a énoncé, il y a deux siècles, le projet de créer une écriture universelle, dans laquelle toutes les idées composées fussent exprimées au moyen de signes conventionnels des idées simples, selon des règles fixes. Il dit: « Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura haec universalis aeque erit facilis quam communis, et quae possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio (*). »

A la solution de ce problème a contribué d'abord le développement de l'écriture algébrique, qui s'est beaucoup perfectionnée après Leibniz. Au moyen des signes $+$, $-$, $=$, $>$, etc., des parenthèses, et des lettres de l'alphabet, elle permet d'écrire en symboles quelques propositions. Mais ce qui a le plus contribué à la solution du problème, c'est la nouvelle et importante science qu'on appelle Logique mathématique, et qui étudie les propriétés formelles des opérations et des relations de logique. Cette science a été cultivée dans notre siècle par Boole, Cayley, Clifford, Delboeuf, De Morgan, Ellis, Frege, Grassmann, Günther, Halsted, Jevons, Liard, Macfarlane, Mc Coll, Nagy, Peirce, Poretzky, Venn, et par beaucoup d'autres, dont on trouvera le nom dans le livre de M. Schröder, *Algebra der Logik*, ouvrage qui contient tout ce qu'on a publié sur cette branche des Mathématiques.

Par la combinaison des signes d'Algèbre et de Logique, on peut exprimer en symboles des propositions toujours plus longues et plus complètes, et le résultat auquel on est arrivé dans ces dernières

---

(*) *Dissertatio de arte combinatoria*, Lipsiae, 1666, n. 90.

années, est qu'on peut représenter toutes les relations de logique avec peu de signes, ayant une signification précise, et assujettis à des règles bien déterminées. En conséquence, en introduisant des signes pour indiquer les idées de l'Algèbre, ou de la Géométrie, on peut énoncer complètement en symboles les propositions de ces sciences. Maintenant une Société de Mathématiciens publie un formulaire qui se propose de contenir toutes les propositions connues sur certains sujets de Mathématique. Ce formulaire, écrit entièrement en symboles, est publié par la *Rivista di Matematica*. Ont déjà paru les formules de logique, de l'algèbre élémentaire, de l'arithmétique, la théorie des grandeurs, la théorie des ensembles de points, et sont sous presse la théorie des limites, des séries, des fonctions continues, des dérivées, etc.

Nous nous proposons ici d'expliquer les notations et les lois de cette écriture symbolique.

Classes.

§ 2. Nous écrirons K au lieu du mot « Classe », ou ensemble quelconque d'objets. On indique par des signes les classes qui ont quelque importance dans une science. Voici les signes adoptés jusqu'à présent dans le Formulaire :

N	signifie	nombre entier positif.
n	»	nombre entier (positif, nul, ou négatif).
N_0	»	nombre entier positif ou nul.
R	»	nombre rationnel positif.
r	»	nombre rationnel.
Q	»	nombre réel positif (quantité).
q	»	nombre réel.
Q_0	»	nombre réel positif ou nul.
q'	»	nombre imaginaire de la forme $x + y\sqrt{-1}$.
q_m	»	nombre complexe d'ordre m.
Np	»	nombre premier.

Si m est un N, Z_m ou Zm représente l'ensemble des nombres $1, 2, \ldots m$.

Si p et q sont des N, et $p < q$, Z (p, q) représente l'ensemble des nombres $p, p+1, p+2, \ldots q$.

Si a et b sont des q, $a \vdash\!\dashv b$ représente l'ensemble des nombres réels compris entre a et b, c'est-à-dire l'intervalle de a à b, y compris a et b; $a - b$ représente le même intervalle sans les extrêmes, $a \dashv b$ et $a \vdash b$ indiquent le même intervalle, en excluant a et comprenant b, ou réciproquement.

Avec la lettre θ on désigne l'intervalle $0 \vdash\!\dashv 1$.

On peut regarder ces signes comme des abréviations des mots qu'ils représentent. Mais ils ont une utilité plus grande que celle de l'abréviation, qui est d'être dépourvus de toute forme grammaticale; on pourra donc les grouper selon les règles qui vont suivre, et on les lira avec la forme grammaticale qu'exige la langue dans laquelle on traduit les formules symboliques.

Si le signe K est seul, il signifie simplement « classe »; mais s'il est écrit en avant d'une classe donnée u, l'écriture Ku signifie « classe de u ». Ainsi Kq signifie « classe de quantités réelles » ou « ensemble de points sur une droite ». (Voir § 29).

§ 3. On peut d'abord combiner les signes qui représentent des classes de nombres, par les opérations algébriques, en convenant que si, dans une expression algébrique fx, qui contient en un seul lieu une lettre variable x, on substitue à x le nom d'une classe u, l'expression fu indique l'ensemble des valeurs que prend fx, lorsque x prend toutes les valeurs de la classe u. Ainsi:

$2\,\mathrm{N}$	signifie	nombre pair positif.
$2\,\mathrm{n}$	»	nombre pair.
$2\,\mathrm{N}+1$	»	nombre impair supérieur à l'unité.
$2\,\mathrm{N}-1$, ou $2\,\mathrm{N}_0+1$,	signifie	nombre impair.
N^2	signifie	nombre carré.
5^{N}	»	les puissances de 5
$-\mathrm{Q}$	»	nombre réel négatif.

Si a est un N, $\mathrm{N} \times a$, ou $\mathrm{N}a$ signifie « les multiples de a »; N^a « les puissances $a^{\text{ièmes}}$ »; a^{N} « les puissances de a ».

Si a est un q, $a+\mathrm{Q}$ signifie « nombre plus grand que a »; $a-\mathrm{Q}$ signifie « nombre inférieur à a »; $a+\mathrm{Q}_0$ « nombre supérieur ou égal à a ».

§ 4. On peut faire une convention analogue pour les fonctions de deux ou de plusieurs variables. Soit $f(x, y)$ une expression qui contient dans une seule place la lettre x, et dans une seule place la lettre y. Si au lieu de x on substitue le nom d'une classe u, et au lieu de y le nom d'une classe v, $f(u, v)$ indique l'ensemble des valeurs que prend $f(x, y)$ lorsque x prend toutes les valeurs de la classe u, et y celles de la v. Ainsi $\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$ signifie « l'ensemble des valeurs que prend l'expression x^2+y^2, lorsque x et y sont des entiers positifs », c'est-à-dire « les sommes de deux carrés ». Il faut bien distinguer $\mathrm{N}^2+\mathrm{N}^2$ de $2\,\mathrm{N}^2$, qui représente les doubles des carrés.

N/N signifie « le rapport de deux nombres entiers » c'est-à-dire « nombre rationnel ».

$(1+N)\times(1+N)$ signifie « les nombres rectangulaires ».

Nous avons supposé que l'expression considérée contienne dans une seule place la lettre variable x. Si l'expression contient plusieurs fois le x, comme la x^2-3x, et si au lieu de x on écrit p. e. N, on obtient N^2-3N qui représente l'ensemble des valeurs que prend l'expression x^2-3y, lorsque x et y sont des entiers positifs, c'est-à-dire, les résidus quadratiques de 3. On verra dans la suite (§ 28) comment on indique l'ensemble des valeurs qu' acquiert une fonction quelconque d'une variable.

§ 5. On peut appliquer la même convention à la Géométrie. Il faut pour cela avoir à notre disposition des opérations géométriques, analogues à celles de l'Algèbre. Or, Möbius avec son *Calcul barycentrique*, Bellavitis, dans la *Méthode des équipollences*, Grassmann dans sa *Science de l'extension (Ausdehnungslehre)*, Hamilton dans les *Quaternions*, De Saint Venant, Chelini, etc., ont créé une nouvelle branche des Mathématiques, qu'on peut appeler Calcul géométrique. Cette science plus puissante que la Géométrie analytique, qui n'est qu'un cas particulier, exécute les opérations tout de suite sur les êtres géométriques, sans passer par les nombres qui les déterminent. Les calculs algébrique, géométrique, logique, ont des opérations analogues, mais assujetties à des règles particulières à chaque espèce de calcul. « Les propriétés des symboles qui se rapportent aux quaternions », dit M. Tait (*) « nous rappellent les symboles électifs de la logique, tels qu'ils sont donnés dans le Traité admirable de Boole: *On the laws of thought*. La similitude frappante de ces deux systèmes de symboles, types de procédés qui sont au fond les mêmes, nous suggère la remarque qu'après tout, il n'y a qu'une science unique dans l'Analyse mathématique, ayant diverses branches, mais employant dans chacune d'elles les mêmes procédés. Par l'une de ses branches, cette science nous dévoile les mystères de la Géométrie de position, hors de la portée du raisonnement géométrique ordinaire; par l'autre, elle permet au logicien d'arriver à des vérités de déduction auxquelles il n'aurait jamais pu atteindre sans le secours de l'instrument des formules. »

Faisons seulement usage de la théorie des vecteurs, qui est la partie élémentaire commune à tout calcul géométrique.

(*) *Quaternions*, traduit par Plarr. Paris, 1882, p. 81,

Si u et v sont des vecteurs non parallèles,

qu signifie vecteur parallèle à u.
qu + qv » vecteur complanaire avec u et v.

Si a est un point,

a + qu signifie droite qui passe par a et a la direction de u.
a + qu + qv » plan qui passe par a, et est parallèle aux vecteurs u et v.

Relations et opérations sur les classes.

§ 6. Toutes les relations et les opérations de logique s'expriment au moyen des signes

ε, c, ɔ, $=$, $\frown$, $\smile$, $-$, V, Λ

qu'on peut prononcer

est, contient, est contenu, est égal, et, ou, non, tout, rien.

Les signes c et V sont ici mentionnés par symétrie, car ils n'ont aucune utilité pratique. La correspondance entre les signes et les mots n'est pas toujours exacte. Voici les valeurs de ces signes.

Soit a une classe. Alors $x \varepsilon a$ représente la proposition singulière: « x est un individu de la classe a », ou « x est un a ». Le signe ε est l'initiale du mot ἐστί.

On écrira $x, y, z \varepsilon a$, au lieu des propositions $x \varepsilon a$, $y \varepsilon a$, $z \varepsilon a$, et dans ce cas le signe ε signifie « sont ».

Si a et b sont des K, on peut écrire b c a pour indiquer la proposition « la classe b contient la classe a ». Le signe c est l'initiale du mot *contient*. Mais on exprimera toujours la même proposition en écrivant a ɔ b, qu'on lit « la classe a est contenue dans b », ou « tout a est b ».

$a = b$ signifie « les classes a et b sont identiques », c'est-à-dire « tout a est b, a ɔ b, et tout b est a, b ɔ a ».

$a \frown b$, ou simplement ab, représente la classe commune aux a et b.

$a \smile b$, représente l'ensemble des individus qui appartiennent à l'une, au moins, des classes a et b.

$-a$ représente la classe des « non a ». Ainsi $b - a$ signifie « les b qui ne sont pas des a ».

Parmi les classes il faut aussi considérer la classe nulle, ou rien, indiquée par Λ, et qui dans la Logique mathématique a le même rôle que le 0 dans l'Algèbre. Ainsi $a \frown b =$ Λ signifie « nul a est b ». La lettre Λ est l'initiale renversée du mot *vrai*.

§ 7. Exemples.

$9 \varepsilon N^2$ « 9 *est un* carré ».

$13 \varepsilon N^2 + N^2$ « 13 *est la* somme de deux carrés ».

$3, 5, 7 \varepsilon Np$ « 3, 5, 7 *sont* des nombres premiers ».

$7^N \supset 8N \pm 1$ « toute puissance de 7 *est* de la forme $8x \pm 1$, où x est un N.

$2N \frown 3N = 6N$ « les multiples communs de 2 et de 3 *sont les* multiples de 6 ».

$Np \frown (3+N) \supset 6N \pm 1$ « les nombres premiers supérieurs à 3 ont la forme $6N \pm 1$ ».

$(1+N)^{10} \supset 11N \smile (11N+1)$ « les puissances dixièmes des nombres supérieurs à l'unité *sont* de la forme $11N$, *ou* $11N+1$ ».

$4N \smile 6N \supset 2N$ « les multiples de 4 *et* les multiples de 6 *sont des* multiples de 2 ».

Dans cet exemple le signe $\smile$ correspond au mot *et*.

$N^2 \frown (3N-1) = \Lambda$ « *il n'y a pas* de carrés de la forme $3N-1$ ».

$Np \frown (4N+1) \supset N^2 + N^2$ « les nombres premiers de la forme $4N+1$ *sont* la somme de deux carrés ».

$Np \frown (4N-1) \frown (N^2 + N^2) = \Lambda$ « des nombres premiers, de la forme $4N-1$, et sommes de deux carrés, *n'existent point* ».

$Np = (1+N) - [(1+N) \times (1+N)]$ « Les nombres premiers *sont* les nombres supérieurs à l'unité, et qu'on ne peut pas décomposer dans le produit de deux nombres supérieurs à l'unité ».

Si a est N, a/N représente l'ensemble des nombres entiers et fractionnaires a, $a/2$, $a/3$, $a/4$, ... Pour indiquer « les nombres entiers diviseurs de a » on écrira $N \frown (a/N)$.

Propriétés des opérations de logique.

§ 8. Les opérations indiquées par les signes $\frown$ et $\smile$ s'appellent aussi *multiplication logique*, et *addition logique*; elles ont toutes les propriétés des correspondantes opérations algébriques, et maintes autres, dont voici les plus importantes.

Les lettres a, b, c, ... désignent des classes.

1. $a \frown b = b \frown a$ 1'. $a \smile b = b \smile a$.

Ces identités expriment la propriété *commutative* de la multipli-

cation et de l'addition logiques. « Transpositio litterarum in eodem termino nihil mutat, ut *ab* coincidet cum *ba* » Leibniz (*).

2. $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c = abc$ 2'. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c = a \cup b \cup c$.

Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont donc *associatives*.

3. $a\,(b \cup c) = ab \cup ac$ 3'. $a \cup (bc) = (a \cup b)\,(a \cup c)$.

Ces formules expriment que la multiplication logique est *distributive* par rapport à l'addition, (comme $a\,(b+c) = ab + ac$); et que l'addition logique est distributive à l'égard de la multiplication, propriété qui n'a pas la correspondante en Algèbre.

4. $aa = a$ 4'. $a \cup a = a$.

Cette loi, appelée par Jevons « the law of simplicity », n'a pas de correspondante en Algèbre. Elle rend le calcul logique beaucoup plus simple que le calcul algébrique. « Repetitio ejusdem litteræ in eodem termino est inutilis » Leibniz.

5. $-(-a) = a$,

deux négations font une affirmation.

6. $-(ab) = (-a) \cup (-b)$ 6'. $-(a \cup b) = (-a)\,(-b)$.

« La négation d'un produit est la somme des négations des facteurs; la négation d'une somme est le produit des négations des termes ». Ces curieuses propriétés de la négation sont dues à Aug. De Morgan, (Cambridge Phil. Transactions, 1858), qui les a explicitement énoncées; car elles sont implicitement connues à tout homme qui raisonne bien. On déduit que des deux signes $\cap$ et $\cup$ l'un s'exprime au moyen de l'autre et du signe de négation. Ainsi au lieu de $a \cup b$ on pourrait écrire $-[(-a)\,(-b)]$.

7. $\mathrm{V} = -\Lambda$ 7'. $\Lambda = -\mathrm{V}$

8. $a \cup \Lambda = a$ 8'. $a \cap \mathrm{V} = a$

9. $a \cap \Lambda = \Lambda$ 9'. $a \cup \mathrm{V} = \mathrm{V}$

10. $a \cap -a = \Lambda$ 10'. $a \cup -a = \mathrm{V}$.

Des formules 8 et 8' résulte que Λ et V sont les *modules* des opérations $\cup$ et $\cap$.

11. $a \cap b \supset a$. 11'. $a \supset a \cup b$.

De la combinaison de ces formules, on en déduit beaucoup d'autres, qu'on peut lire dans le traité de M. Schröder, ou dans le Formulaire publié par la *Rivista di Matematica,* première partie.

(*) Leibnitii, *Opera Philosophica*, 1840, p. 98.

Nous nous limiterons à énoncer la loi de dualité, par laquelle chaque identité entre classes, composée par les signes

$$=, \supset, \subset, \cap, \cup, -, \Lambda, \mathrm{V}$$

se transforme en une nouvelle identité, si l'on renverse tous ces signes, c'est-à-dire si on les substitue par

$$=, \subset, \supset, \cup, \cap, -, \mathrm{V}, \Lambda.$$

Ainsi de la 1 on obtient la 1', de la 2 la 2', etc. La 5 se transforme en elle-même.

L'intéressante théorie des opérations et des relations de logique a encore une nouvelle utilité, car il y a des opérations et des relations appartenant à des branches tout-à-fait différentes des Mathématiques, qui ont les mêmes propriétés. Par ex. soient a, b... des N; à la formule $a \supset b$ attribuons la signification « a est un diviseur de b »; à la $a \cap b$ la signification « le plus grand commun diviseur de a et b »; à la $a \cup b$ « le plus petit commun multiple »; et que Λ représente l'unité. Alors subsistent toutes les formules de logique, contenant seulement les signes $=, \supset, \cap, \cup, \Lambda$, et elles deviennent des propositions de la théorie des nombres. On pourrait au signe V attribuer la signification de l'∞, en convenant que tout nombre soit diviseur de l'∞. En conséquence toute proposition de la théorie des nombres, contenant les mots: « est diviseur », « est multiple », « plus grand commun diviseur », « plus petit commun multiple », se transforme dans une autre, en échangeant le premier mot avec le deuxième, et le troisième avec le quatrième.

Nous avons déjà dit qu'on peut exprimer l'opération $\cup$, somme logique, au moyen des opérations $\cup$ et $-$, (multiplication et négation). Quelques Auteurs ont encore introduit un nouveau signe d'opération, qu'on peut représenter au moyen des précedentes, et qu'on appelle la disjonction complète. Si a et b sont des classes, on pose, par définition

$$a \circ b = a - b \cup b - a.$$

Le signe $\circ$ correspond au latin *aut;* le signe $\cup$ à *vel.* Cette opération, commutative et associative, a de curieuses propriétés. Voir le Formul. I, § 3, P24-30.

Propositions.

§ 9. On adopte entre propositions les signes déjà expliqués entre classes avec la signification suivante. Soient a, b des propositions:

$a \supset b$ signifie « de la a on déduit la b » ou « la b est conséquence de la a ». La formule $a \supset b$ s'appelle une déduction; a en est l'hypothèse (par abréviation Hp), et b en est la thèse (abrégée en Ts).

$a = b$ signifie « de la a on déduit la b, et réciproquement ».
$a \frown b$, ou ab, est l'affirmation simultanée des propositions a et b.
$a \smile b$ signifie « une au moins des propositions a et b est vraie ».
$- a$ représente la négation de a.
Λ représente l'absurde.

Pour faciliter l'écriture, au lieu de placer le signe de négation devant une proposition, on le place quelquefois devant le signe de relation. Ainsi $a - = b$ signifie $-(a = b)$, ou a est différent de b. Si a et b sont des classes, $a \frown b - = \Lambda$ représente la proposition particulière affirmative « quelques a sont b ».

§ 10. En mathématique on sépare les différentes parties d'une formule au moyen de parenthèses. Mais ces parenthèses rendent très compliquées les formules qui vont suivre. On arrive au même but au moyen de points. On écrira un point entre les signes d'une formule pour aviser qu'on doit unir ce qui précède le point avec ce qui le suit. Mais si l'une de ces parties contient déjà un point, on en écrira deux pour séparer les deux parties; etc. Donc, pour lire une formule décomposée par des points, on unira d'abord les signes qui ne sont pas séparés par des points, puis les groupes qui sont séparés par un point, puis ceux qui sont séparés par deux, et ainsi de suite. P. ex., si $a, b, c, \ldots$ désignent des signes quelconques,

$$a . bc \quad , \quad ab . c \quad , \quad ab . cd$$

signifient

$$a (bc) \quad , \quad (ab) c \quad , \quad (ab) (cd) ,$$

et la formule

$$ab . cd : e . fg .\!\therefore hk . l$$

est équivalente à la

$$\{[(ab) (cd)] [e (fg)]\} [(hk) l] ,$$

qu'on peut aussi écrire avec les *vinculums:*

$$\underline{\underline{\underline{\underline{ab}\,\underline{cd}}\,\underline{e\,\underline{fg}}}\,\underline{\underline{hk}\,l}}.$$

On voit donc que les parenthèses, les vinculums, et les points sont des notations équivalentes.

Nous adopterons les points seulement entre propositions.

Si en écrivant deux signes a et b l'un après l'autre, on obtient quelque chose ab, nous dirons que ab est une combinaison binaire des signes. Tel est le produit ab des nombres a et b. Une formule peut être obtenue au moyen de plusieurs signes combinés plusieurs fois par des combinaisons binaires; avec la suite de 4 lettres, par des combinaisons binaires on obtient les 5 formules

$$a:bc.d \quad , \quad a:b.cd \quad , \quad ab.cd \quad , \quad a.bc:d \quad , \quad ab.c:d$$

ou

$$a[(bc)d] \quad , \quad a[b(cd)] \quad , \quad (ab)(cd) \quad , \quad [a(bc)]d \quad , \quad [(ab)c]d$$

et avec la suite de $n+1$ lettres, par des combinaisons binaires on obtient $\frac{(n+2)(n+3)\dots(2n)}{1.2\dots n}$ formules différentes (*).

On a fréquemment à considérer des combinaisons ternaires, c'est-à-dire une combinaison abc de trois signes a, b, c, laquelle n'est pas décomposable en combinaisons binaires $a.bc$, ou $ab.c$, car bc et ab n'ont pas de signification. Telles sont les formules $a+b$, $a-b$, $a=b$, $a \cup b$, $a \supset b$,... P. ex. $a > b$ est une combinaison de trois signes, indécomposable en combinaisons binaires; car les groupes $a >$ et $> b$, n'ont pas de signification. Mais on peut réduire une combinaison ternaire abc aux binaires, en attribuant au groupe ab la signification de « signe qui étant suivi de c produit abc », et au groupe bc la signification « signe qui, en suivant a, produit abc ». Alors on pourra décomposer $a \supset b$ en $a \supset$ et b, ou en a et $\supset b$. Par exemple $ab.\supset c$ signifie $(ab)(\supset c)$ ou $(ab)\supset c$, et $a\supset.bc$ signifie $(a\supset)(bc)$ ou $a\supset(bc)$.

Par ex. étant a, b, ... des propositions,

$$a\supset.b\supset c:d\supset e\cup f.\therefore\supset:h\cap k\supset l.\supset.m\supset n$$

signifie « si de a on déduit que de b on déduit c, et si de d on déduit e ou f, alors si de h et k on déduit l, de m on déduira n ».

En Analyse on n'a jamais des combinaisons quaternaires, irréductibles aux précédentes.

Mais si l'on regarde les combinaisons des divers ordres comme irréductibles, alors avec la suite de 4 lettres on peut former 11 groupements, dont 5 sont ci-dessus écrits, et les autres sont:

$$a:bcd \quad , \quad abc.d \quad , \quad a.bc.d \quad , \quad ab.c.d \quad , \quad a.b.cd \quad , \quad abcd.$$

ou

$$a(bcd) \quad , \quad (abc)d \quad , \quad a(bc)d \quad , \quad (ab)cd \quad , \quad ab(cd) \quad , \quad abcd;$$

on ne connaît pas la formule qui donne le nombre des groupements qu'on peut faire avec la suite de $n+1$ lettres.

En Algèbre on a un grand nombre de conventions pour supprimer les parenthèses; nous ferons la suivante:

Si a, b, c sont des propositions, en écrivant $ab\supset c$ nous entendons $ab.\supset c$ (de ab on déduit c), et non $a.b\supset c$ (la a est vraie, et de b on

---

(*) Lucas, *Théorie des nombres*, 1891, pag. 149.

déduit c). La formule $a \supset bc$ signifie $a \supset (bc)$ et non $(a \supset b) c$; et la $ab = cd$ signifie $(ab) = (cd)$, et non $a (b = c) d$, etc.

En introduisant les points pour séparer les parties d'une proposition, il faut abolir leur usage pour indiquer la multiplication $a . b$, qui s'écrira ab ou $a \times b$, et la division $a : b$, qu'on écrira a/b.

§ 11. Exemples.

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . \supset . (a - 1)! + 1 \,\varepsilon\, \mathrm{N}\, a$$

« Si a est un nombre premier, $(a - 1)! + 1$ est un multiple de a » (Théorème de Wilson). Ici les points décomposent la proposition en trois parties, hypothèse, signe de déduction et thèse.

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{N} . \supset . a (a + 1)(a + 2) \,\varepsilon\, 6\,\mathrm{N}$$

« Quel que soit le nombre a, le produit $a (a + 1)(a + 2)$ est divisible par 6. »

$$a , b \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset . (a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

« Si a et b sont des q, on a l'identité écrite. » On ne peut pas écrire cette identité sans faire d'hypothèse sur a et b; car elle subsiste encore si a et b sont des nombres imaginaires; mais elle n' est plus exacte si a et b sont des quaternions.

$$a , b \,\varepsilon\, \mathrm{Q} . a -= b . \supset . (a + b)/2 > \sqrt{ab}$$

« Si a et b sont deux quantités positives, différentes entre elles, leur moyenne arithmétique est plus grande que leur moyenne géométrique. » Les points divisent la formule en quatre parties; les deux premières constituent l'Hp.

$$x , y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset : xy = 0 . = . x = 0 . \cup . y = 0 .$$

« Étant x et y des quantités, si leur produit est nul, une au moins d'entre elles est nulle, et réciproquement. » Ici les : décomposent la proposition en deux parties; la première est composée de l'Hp, et du signe de déduction; la deuxième, qui est la Ts, est une égalité logique. Si l'on prend les négatives des deux membres de la thèse, en appliquant la règle 6′ du § 8 on a:

$$x , y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset : xy -= 0 . = . x -= 0 . y -= 0 .$$

$$\mathrm{N}^2 \cap (\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}^2) -= \Lambda$$

« Il y a des nombres carrés, qui sont la somme de deux carrés. »

$$\mathrm{N}^3 \cap (\mathrm{N}^3 + \mathrm{N}^3) = \Lambda$$

« Il n'y a pas de cube, somme de deux cubes. »

$a, b, x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset : x+y=a . x-y=b . = . x=(a+b)/2 . y=(a-b)/2.$
$x, y \,\varepsilon\, \mathrm{q} . \supset : x^2+y^2=0 . = . x=0 . y=0 .$
$a \,\varepsilon\, \mathrm{Np} . b, c \,\varepsilon\, \mathrm{N} . bc \,\varepsilon\, \mathrm{N}a . \supset . b \,\varepsilon\, \mathrm{N}a . \cup . c \,\varepsilon\, \mathrm{N}a .$

§ 12. Toutes les identités du § 8 subsistent si a, b, ... représentent des propositions quelconques. Maintenant nous avons le moyen d'écrire en symboles beaucoup d'autres propositions de logique; nous en reporterons ici quelques-unes des plus importantes. Dans ce qui suit, a, b,... sont des propositions. Elles subsistent aussi, si a, b, ... sont des classes; mais alors les signes $\supset$ et Λ entre les classes signifient « est contenu » et « rien », et les mêmes entre propositions signifient « on déduit », et « absurde ». [On peut même supposer que a, b, ... sont des N, en faisant la convention de la fin du § 8.]

1. $a \supset b . \supset . ac \supset bc$ 1'. $a \supset b . \supset . a \cup c \supset b \cup c$
2. $a \supset b . c \supset d . \supset . ac \supset bd$ 2'. $a \supset b . c \supset d . \supset . a \cup c \supset b \cup d .$

« On peut multiplier les deux membres d'une déduction par une même proposition, et multiplier les membres correspondants de deux déductions. Ainsi pour l'addition. »

3. $a \supset b . b \supset c . \supset . a \supset c$

Syllogisme. « Si de la proposition a on déduit la b, et de la b on déduit la c, alors de la a on déduit la c. » Si a, b, c sont des classes, cette proposition signifie « Si tout a est b, et tout b est c, alors tout a est c. » [Si a, b, c sont des N, elle signifie « Si a est un diviseur de b, et b un diviseur de c, a sera un diviseur de c. »].

4. $a \supset b . a \supset c . = . a \supset bc$ 4'. $a \supset c . b \supset c . = . a \cup b \supset c .$

Ces formules, dues à Mc Coll (*), sont très intéressantes. La 4 permet de transformer l'ensemble de deux déductions ayant la même Hp en une déduction seule; la 4' transforme l'ensemble de deux déductions ayant la même Ts.

5. $a \supset b . = . -b \supset -a$

« Si de a on déduit b, de $-b$ on déduit $-a$, et réciproquement. »

6. $a = b . = . -a = -b$

Sont à noter les propositions suivantes, dues à M. Peirce, qui permettent de transporter un facteur du premier dans le second membre, et un terme du deuxième dans le premier d'une déduction:

(*) *Proceedings of the London mathematical Society*, 1878, vol. X, p. 16.

7. $ab \supset c . = . a \supset c \cup -b$
8. $a \supset b \cup c . = . a - b \supset c$
9. $ab \supset c . = . a - c \supset -b$
10. $ab \supset c \cup d . = . a - c \supset -b \cup d .$

On a

11. $a \supset \Lambda . = . a = \iota .$
12. $a \supset b . = . a - b = \Lambda .$

Cette proposition transforme chaque déduction en une égalité, dont le second membre est Λ. « Omne a est b, id est ... a non b est non ens » LEIBNIZ (*).

Donc on peut se passer du signe $\supset$. Si on le supprime, selon BOOLE, il y a une plus grande symétrie dans quelques formules; mais elles se présentent sous une forme trop différente de celle du langage ordinaire. En suivant PEIRCE, SCHRÖDER, etc., nous le conservons.

Remarquons encore la formule

13. $a \supset . b \supset c : = . ab \supset c ,$

« affirmer que de a on déduit que de b on déduit c, c'est comme affirmer que de ab on déduit c » (**); cette formule transforme une proposition contenant deux déductions en une qui contient un seul signe $\supset$, et réciproquement. Nous appellerons *importer* l'hypothèse a, le passage du premier au second membre, et *exporter* l'hypothèse a le passage inverse.

Comme exemple de ces transformations, si a, b, c sont des q, on a:

$a)$ $ac = bc . c -= 0 . \supset . a = b .$

Transportons le deuxième membre dans le premier (prop. 12); on a

$b)$ $ac = bc . c -= 0 . a -= b . = \Lambda .$

Transportons le premier ou le deuxième facteur; on a les deux propositions

$c)$ $a -= b . c -= 0 . \supset . ac -= bc .$
$d)$ $ac = bc . a -= b . \supset . c = 0 .$

Si dans la $b)$ on transporte deux facteurs dans le second membre, on a les trois formules

$e)$ $ac = bc . \supset . a = b . \cup . c = 0 .$
$f)$ $a -= b . \supset . ac -= bc . \cup . c = 0 .$
$g)$ $c -= 0 . \supset . a = b . \cup . ac -= bc .$

(*) Ib., p. 102.
(**) PEIRCE, *On the Algebra of Logik*, American Journal of Mathematics, III (1881), p. 24.

Exportons la $c - = 0$; on a encore

h) $c - = 0 . \supset : ac = bc . \supset . a = b$,

et de l'identité $a = b . \supset . ac = bc$, on déduit

i) $c - = 0 . \supset : ac = bc . = . a = b$, etc.

Lettres variables.

§ 13. Nous ferons encore les remarques suivantes sur le signe de déduction. En général les propositions contiennent des lettres indéterminées, x, y, z, que nous écrirons d'ordinaire en italique. Les lettres indéterminées représentent, selon les cas, des nombres entiers, des nombres réels ou imaginaires, des points, des lignes, des classes, des propositions, etc; et il convient, la première fois qu'une lettre indéterminée paraît dans une formule, d'écrire ce que l'on veut qu'elle représente; ainsi la première fois que dans une formule paraît une lettre indéterminée x, elle paraîtra toujours sous la forme $x \varepsilon a$, où a est une classe bien déterminée; p. ex. $x \varepsilon \mathrm{N}$, $x \varepsilon \mathrm{q}$, $x \varepsilon \mathrm{q}'$, $x \varepsilon \mathrm{K}$, etc.

Font exception à cette règle les formules dans lesquelles figure une lettre variable; mais telles que leur valeur ne dépend point de cette lettre. Ainsi, étant fx une fonction de x, les expressions

$$(fx)_{x=a} \;, \quad \lim_{x=a} fx \;, \quad \int_a^b fx \, \mathrm{d}x \,,$$

et d'autres, qu'on trouvera dans la suite (§ 17), ne dépendent point de la lettre x, qu'on peut substituer par y, z,... sans en changer la valeur. Dans ces formules il n'est pas nécessaire d'expliquer la signification de x, car cela est déjà dit dans la formule même.

§ 14. Si a et b sont des propositions contenant des lettres indéterminées x, y,... c'est-à-dire, sont des conditions entre ces lettres, la déduction $a \supset b$ signifie : « quelles que soient les valeurs de x, y, ... pourvu qu'elles satisfassent à la condition a, elles satisferont aussi à la condition b ». Ainsi on interprète toutes les propositions du § 11.

Mais quelquefois on a les deux propositions a et b qui contiennent deux groupes de lettres variables, x, y, ... et u, v, ...; et l'on doit dire que u, v, ... sont tels, que, quels que soient x, y, ..., si la condition a est vraie, la b est aussi vraie. Alors on écrira

$$a \supset_{x,\, y,\, \ldots} b$$

en écrivant, au pied du signe $\supset$, les lettres par rapport auxquelles on fait la déduction. La proposition $a \supset_{x,\, y,\, \ldots} b$ est une condition entre les lettres u, v, ... qu'on ne trouve pas indiquées, et elle est indépendante des lettres x, y, ... qui figurent comme indices.

On écrit les mêmes indices au signe $=$; ainsi $a =_{x,y} b$ signifie $a \supset_{x,y} b \,.\, b \supset_{x,y} a$; la $a =_{x,y} \Lambda$ signifie « il n'y a pas de valeurs de x et y qui satisfont à la condition a »; et sa négation $a - =_{x,y} \Lambda$ signifie « il y des valeurs de x et y qui satisfont à la condition a ».

Exemples. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ contient quatre lettres a, b, c et x. Pour indiquer « quel que soit le nombre réel x, cette équation est satisfaite », on ne peut pas écrire

$$x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset .\, ax^2 + bx + c = 0 \;,$$

car elle signifie « quel que soit le nombre x, et quels que soient a, b, c l'équation est satisfaite ». On écrira donc $x \,\varepsilon\, \mathrm{q} \,.\, \supset_x .\, ax^2 + bx + c$, qui signifie « les a, b, c sont telles que, quel que soit x, l'équation est satisfaite ». On déduit, si a, b, c sont des q, que $a = b = c = 0$; donc :

$$a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{q} : x\,\varepsilon\,\mathrm{q} \,.\, \supset_x .\, ax^2 + bx + c = 0 : \supset .\, a = b = c = 0 \;.$$

Soient p, q, p', q' des q'. La proposition « les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2 + p'x + q' = 0$, ont une racine commune » est une condition entre p, q, p', q', indépendante de la lettre x; l'Algèbre, par l'élimination, montre comment on peut énoncer cette même proposition sans écrire la lettre x; et l'on a:

$$p\,,q\,,p'\,,q'\,\varepsilon\,\mathrm{q'} \,.\, \supset \therefore x\,\varepsilon\,\mathrm{q'} \,.\, x^2 + px + q = 0 \,.\, x^2 + p'x + q' = 0 \,.$$
$$- =_x \Lambda : = .\, (p^2 - q)(p'^2 - q') - \left(pp' - \frac{q + q'}{2}\right)^2 = 0 \,.$$

$$a\,,b\,,c\,\varepsilon\,\mathrm{n} \,.\, \supset \therefore x\,,y\,\varepsilon\,\mathrm{n} \,.\, ax + by = c \,.\, - =_{x,y} \Lambda : = .\, c\,\varepsilon\,\mathrm{n} \times \mathrm{D}(a,b).$$

« Si a, b, c, sont des nombres entiers, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $ax + by = c$ soit satisfaite par des valeurs entières de x et y, c'est que c soit un multiple du plus grand commun diviseur de a et b. »

$$a\,\varepsilon\, 1 + \mathrm{N} : x\,\varepsilon\, 1 + \mathrm{N} \,.\, x^2 \leqq a \,.\, a\,\varepsilon\,\mathrm{N} \times x \,.\, =_x \Lambda : \supset .\, a\,\varepsilon\,\mathrm{Np}.$$

« Si a est un nombre supérieur à l'unité, et s'il n'y a pas de nombre x, supérieur à l'unité, dont le carré soit moindre ou tout au plus égal à a, et qui divise a, alors a est un nombre premier. »

§ 15. Comme en Analyse on regarde comme des fonctions d'une variable x, même les expressions qui ne contiennent pas x, ou qu'on peut réduire à ne contenir le x, ainsi dans nos recherches il se présente des propositions qui ne contiennent pas de lettres indéterminées. Si a et b sont des propositions qui ne contiennent pas des lettres indéterminées, la déduction $a \supset b$ signifie toujours « si a est vraie, b

est aussi vraie », c'est-à-dire, ou a est vraie et b est vraie, ou a est fausse et b est vraie, ou a est fausse et b est fausse, et l'on exclut le seul cas « a est vraie et b est fausse ». P. ex. considérons la proposition

$$a, b, a', b' \varepsilon \mathrm{q} . a > b . a' > b' . \supset . aa' + bb' > ab' + a'b .$$

Faisons $a = 2, b = 1, a' = 2, b' = 1$; on a:

$$1, 2 \varepsilon \mathrm{q} . 2 > 1 . \supset . 5 > 4$$

dans laquelle l'Hp et la Ts sont vraies. Faisons $a = 1, b = 2, a' = 1, b' = 2$; on a:

$$1, 2 \varepsilon \mathrm{q} . 1 > 2 . \supset . 5 > 4 ,$$

dans laquelle l'Hp est fausse, et la Ts vraie. Faisons $a = 1, b = 2, a' = 2, b' = 1$; on a:

$$1, 2 \varepsilon \mathrm{q} . 1 > 2 . 2 > 1 . \supset . 4 > 5$$

dans laquelle l'Hp et la Ts sont fausses. Le deuxième cas est aussi un exemple de la proposition très connue, que d'Hp fausses on peut tirer des conséquences vraies.

Remarquons que dans le troisième exemple nous n'affirmons ni que $1 > 2$, ni que $4 > 5$; nous affirmons seulement la déduction de la Thèse de l'Hypothèse, laquelle déduction est juste, bien que l'Hp et la Ts soient fausses. En général lorsqu'on dit $a \supset b$ on n'affirme ni la vérité de a, ni celle de b, mais seulement une relation, $\supset$, entre a et b. Et lorsqu'un dit $a \supset . b \supset c$ on n'affirme ni a, ni b, ni c, ni $b \supset c$; l'affirmation est contenue dans le signe de déduction principal, c'est-à-dire celui qui a, à l'un des côtés, le plus grand nombre de points. Bien que cela soit très simple, il est curieux de noter combien d'hommes se trompent sur la signification des propositions conditionnelles.

Si la proposition a ne contient pas de lettres indéterminées, la formule $a = \Lambda$ signifie $-a$; la $a - = \Lambda$ signifie a.

§ 16. Nous avons vu comment les mêmes signes $=$, $\supset$, $\frown$, $\smile$, $-$, Λ représentent des relations et des opérations entre propositions et entre classes. On peut déduire la deuxième signification de la première. Soient a, b des K. On a:

1. $a \supset b . = : x \varepsilon a . \supset_x . x \varepsilon b .$

« Affirmer que la classe a est contenue dans b, signifie que, quel que soit x, s'il est un a, il est aussi un b ».

2. $x \varepsilon a \frown b . = . x \varepsilon a . x \varepsilon b .$

« Affirmer que x est un individu de la classe $a \cap b$, signifie qu'il est un a et qu'il est un b ».

3. $x \varepsilon a \cup b . = . x \varepsilon a . \cup . x \varepsilon b .$
4. $x \varepsilon - a . = . x - \varepsilon a .$
5. $a = \Lambda . = : x \varepsilon a . =_x \Lambda .$

On peut remarquer ici la différence des propriétés des signes ε et $\supset$. En effet la proposition 3 cesse de valoir, si au lieu de ε on écrit $\supset$; car on a toujours

$$x \supset a . \cup . x \supset b . \supset . x \supset a \cup b$$

mais la réciproque n'est pas vraie. On a par exemple

$$\mathrm{n}^{12} \supset 13\,\mathrm{n} \cup (13\,\mathrm{n} + 1) .$$

« Toute puissance 12me ou est un multiple de 13, ou divisée par 13 donne pour reste 1. » On ne peut pas déduire ni que « toute puissance 12me est un multiple de 13 », ni que « toute puissance 12me, divisée par 13, donne pour reste 1 ».

La proposition 4 ne subsiste plus, si au lieu de ε on écrit $\supset$; car les propositions $x \supset - a$ « la classe x est contenue dans non a » et $x - \supset a$ « la classe x n'est pas contenue dans a » ont des significations différentes.

En substituant, dans la 1, au signe $=$ le signe $\supset$, on déduit:

$$a \supset b . \supset : x \varepsilon a . \supset . x \varepsilon b ,$$

d'où, en important l'hypothèse on a:

$$x \varepsilon a . a \supset b . \supset . x \varepsilon b .$$

« Si x est un a, et si tout a est b, alors x est un b. » c'est une nouvelle forme du syllogisme (§ 12, prop. 3). Il n'est pas permis de substituer ici le signe ε à la place de $\supset$. Pour en donner un exemple commençons par dire que l'écriture $u \varepsilon \overline{\mathrm{num}} \infty$ signifie « u est une classe contenant un nombre infini d'individus », comme on verra dans la suite (§ 27). Or des deux propositions

$$5 \varepsilon \mathrm{Np} . \mathrm{Np} \varepsilon \overline{\mathrm{num}} \infty$$

« 5 est un nombre premier; les nombres premiers sont en nombre infini » on ne peut pas tirer de conséquence. (Voir § 21).

Les idées qu'on a ici représentés par les signes ε et $\supset$, satisfont donc à des lois différentes; et on les doit représenter par des signes différents. Selon les termes des logiciens, ε a le sens composé (sensus compositi), et $\supset$ le sens divisé (sensus divisi).

§ 17. Réciproquement on peut déduire l'usage des signes entre propositions de celui entre classes. On examinera ainsi sous un nouveau

point de vue la question des indices au signe $\supset$, question qui présente quelques difficultés aux commençants. Pour cela il faut avancer un cas particulier d'une notation qu'on verra dans la suite (§ 28).

Soit p_x une proposition contenant une lettre variable x, c'est-à-dire une condition pour les x. Par la notation $\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$ nous indiquerons la classe des x qui satisfont à la condition p_x. Si p_x ne contient pas de lettre variable autre que la x, $\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$ est une classe bien déterminée. Si p_x contient d'autres lettres u, v, $\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$ représente une classe, fonction de u, v; mais il faut bien remarquer qu'elle est indépendante de x, et que l'on a

$$\overline{x\,\varepsilon}\, p_x = \overline{y\,\varepsilon}\, p_y \,.$$

On peut lire le signe $\overline{x\,\varepsilon}$ par « les x, lesquels. » Les deux signes $x\,\varepsilon$ et $\overline{x\,\varepsilon}$, l'un après l'autre se détruisent:

1. $$x\,\varepsilon\,(\overline{x\,\varepsilon}\, p_x) = p_x \,;$$

et si a est une K,

2. $$\overline{x\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\, a) = a \,.$$

P. ex. $\overline{x\,\varepsilon}\,(x^2 - 3\,x + 2 < 0)$ représente l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à cette inégalité. Sa signification est encore un peu indéterminée, car on n'a pas dit si x est réel, ou imaginaire, ou un nombre complexe d'ordre supérieur. On a:

$$\mathrm{q} \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(x^2 - 3\,x + 2 < 0) = 1 \mathrm{-} 2 \,,$$

« les nombres réels x tels que $x^2 - 3\,x + 2 < 0$, sont les nombres compris entre 1 et 2 ».

Si p_x, q_x, sont des propositions contenant la lettre indéterminée x, on a les formules suivantes (1-5) correspondantes à celles du § précédent:

1. $p_x \supset_x q_x \,.=.\, \overline{x\,\varepsilon}\, p_x \supset \overline{x\,\varepsilon}\, q_x \,.$

« Affirmer que, quel que soit x, de p_x on déduit q_x, signifie que la classe $\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$ est contenue dans la classe $\overline{x\,\varepsilon}\, q_x$ ». Si les propositions p_x et q_x ne contiennent d'autre lettre que x, on peut supprimer l'indices x au signe $\supset$, et écrire simplement $p_x \supset q_x$; cette proposition est cathégorique. Mais si les propositions p_x et q_x contiennent encore des lettres u, v, ..., la $p_x \supset_x q_x$ est une condition entre les lettres u, v, ... et il n'est pas permis d'omettre le x au pied du signe $\supset$.

2. $\overline{x\,\varepsilon}\,(p_x \cap q_x) = \overline{x\,\varepsilon}\, p_x \cap \overline{x\,\varepsilon}\, q_x \,.$

« La classe des x qui satisfont à la condition $p_x \cap q_x$ est la classe commune aux classes $\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$ et $\overline{x\,\varepsilon}\, q_x$. »

3. $\overline{x\,\varepsilon}\,(p_x \cup q_x) = \overline{x\,\varepsilon}\, p_x \cup \overline{x\,\varepsilon}\, q_x$.
4. $\overline{x\,\varepsilon}\,(-p_x) = -\overline{x\,\varepsilon}\, p_x$.
5. $p_x =_x \Lambda . = . \overline{x\,\varepsilon}\, p_x = \Lambda$.

Soit $p_{x,\,y}$ une condition entre deux variables x et y. On peut considérer la classe $\overline{x\,\varepsilon}\, p_{x,\,y}$ qui est une fonction de y, et la classe $\overline{y\,\varepsilon}\, p_{x,\,y}$ qui est une fonction de x. Mais on peut aussi considérer le couple formé d'un x et d'un y comme un nouveau objet, qu'on indiquera par (x, y); et alors $\overline{(x, y)\,\varepsilon}\, p_{x,\,y}$ représente l'ensemble des couples (x, y) qui satisfont à la condition $p_{x,\,y}$. Si x, y sont des q, et nous identifions, pour un instant, le couple (x, y) avec le point qui a pour coordonnées cartesiennes orthogonales x et y, alors

$\overline{(x, y)\,\varepsilon}\,(x^2 + y^2 = 1) . = .$ circonférence qui a le centre dans l'origine et l'unité pour rayon.

Maintenant soient $p_{x,\,y}$ et $q_{x,\,y}$ des propositions contenant les lettres x et y; la relation entre les classes $\overline{(x, y)\,\varepsilon}\, p_{x,\,y} \supset \overline{(x, y)\,\varepsilon}\, q_{x,\,y}$ est équivalente à $p_{x,\,y} \supset_{x,\,y} q_{x,\,y}$. On supprime les indices au signe $\supset$ si les propositions a et b ne contiennent pas d'autre lettre que x et y; on ne les supprime pas dans le cas contraire.

P. ex., si x et y sont des q, la relation

$$x = y . \supset . x^2 = y^2$$

signifie « le lieu d'équation $x = y$ est contenu dans le lieu d'équation $x^2 = y^2$ ».

§ 18. Les indices au signe $\supset$ satisfont à des lois qu'on n'a pas encore suffisamment étudiées. Cette théorie déjà abstruse par elle-même, le devient encore plus si l'on n'accompagne pas ces règles par des exemples. Le mieux à faire, c'est d'examiner le rôle de ces signes, et leur transformation dans les formules et les démonstrations de Mathématique. En voici quelques mots.

Prenons la formule 13 du § 12:

1. $a \supset . b \supset c : = . ab \supset c$

où a, b, c sont des propositions. Supposons que a contienne une lettre x, et b et c deux lettres x et y. Substituons a_x, $b_{x,\,y}$, $c_{x,\,y}$ à la place de a, b, c, pour indiquer les lettres qu'elles contiennent. On aura

2. $a_x \supset_x . b_{x,\,y} \supset_y c_{x,\,y} : = . a_x b_{x,\,y} \supset_{x,\,y} c_{x,\,y}$.

Transportons $c_{x,\,y}$ dans le premier membre; on a

$$a_x \supset_x . b_{x,\,y} - c_{x,\,y} =_y \Lambda : = . a_x b_{x,\,y} - c_{x,\,y} =_{x,\,y} \Lambda$$

ou, si au lieu de $b_{x,\,y} - c_{x,\,y}$ on écrit $b_{x,\,y}$, ou en faisant $c_{x,\,y} = \Lambda$, on a

3. $a_x \mathrm{O}_x . b_{x,\,y} =_y \Lambda : = . a_x b_{x,\,y} =_{x,\,y} \Lambda$

qu'on peut encore écrire

$$a_x . b_{x,\,y} - =_y \Lambda . =_x \Lambda : = . a_x b_{x,\,y} =_{x,\,y} \Lambda .$$

Supprimons a_x, c'est-à-dire, posons $a_x = \mathrm{V}$; et au lieu de $b_{x,\,y}$ écrivons $a_{x,\,y}$; on a :

4. $a_{x,\,y} - =_y \Lambda . =_x \Lambda : = . a_{x,\,y} =_{x,\,y} \Lambda$

et en prenant les négations des deux membres :

5. $a_{x,\,y} - =_y \Lambda . - =_x \Lambda : = . a_{x,\,y} - =_{x,\,y} \Lambda .$

« Affirmer qu'il y a des x tels qu'il y a des y qui vérifient à la la condition $a_{x,\,y}$, c'est affirmer qu'il y a des couples de x, y qui vérifient à la condition $a_{x,\,y}$ ».

En échangeant le rôle des lettres x et y, on déduit

6. $a_{x,\,y} - =_y \Lambda . - =_x \Lambda : = : a_{x,\,y} - =_x \Lambda . - =_y \Lambda .$

Si la proposition a_x contient la seule lettre x, et la b_y la seule lettre y, on a :

7. $a_x b_y - =_{x,\,y} \Lambda . = . a_x - =_x \Lambda . b_y - =_y \Lambda .$

Or $b_y - =_y \Lambda$ est équivalent à $b_x - =_x \Lambda$. Donc :

8. $a_x b_y - =_{x,\,y} \Lambda . = . a_x - =_x \Lambda . b_x - =_x \Lambda .$

Prenons les négatives des deux membres :

9. $a_x b_y =_{x,\,y} \Lambda . = . a_x =_x \Lambda . \cup . b_x =_x \Lambda .$

Si l'hypothèse d'une déduction contient des lettres non contenues dans la thèse, on a:

10. $a_{x,\,y} \mathrm{O}_{x,\,y} b_x . = : a_{x,\,y} - =_y \Lambda . \mathrm{O}_x b_x .$

Au lieu de dire « si x, y satisfont à la condition a, le x satisfera à la condition b » on peut dire « si x est tel qu'il y a des y qui satisfont à la a, alors il satisfera à la b ». Cette transformation s'appelle *l'élimination* de y.

Fonctions.

§ 19. En Analyse on représente ordinairement une fonction d'une variable x en écrivant un signe au-devant de x. Ainsi on a les fonctions numériques :

$\sqrt{x}$, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$, ... $\mathrm{Sh}\, x$, ... $\mathrm{mod}\, x$, ...

D'une façon analogue, nous indiquerons d'autres fonctions. Soit u une K;

num u signifie « le nombre (numerus) des u ».

En conséquence:

num $u = 0 . = . u = \Lambda$
num $u \varepsilon$ N . = . « le nombre des u est déterminé et fini »
num $u = \infty . = .$ « les u sont en nombre infini ».

Soit u une classe de quantités réelles q; $u \varepsilon$ K q:

max u signifie « le plus grand (maximum) des u »
min u » « le plus petit (minimum) des u ».

Quelquefois on doit ordonner les nombres de la classe u, selon leur grandeur croissante; et on les indique par $\min_1 u$, $\min_2 u$,...; quelquefois plus simplement par u_1, u_2, ... Si l'on ordonne les mêmes nombres selon leur grandeur décroissante, on les indique par $\max_1 u$, $\max_2 u$,... On a $\min_1 u = \min u$, et $\max_1 u = \max u$.

La classe u de q peut n'avoir de maximum ou de minimum; alors on a introduit dans l'Analyse « la limite supérieure des u » indiquée par $l' u$, et « la limite inférieure des u » indiquée par $l_1 u$.

Soit u une classe de nombres, en nombre fini; on représente leur somme par Σu, et leur produit par Πu.

Soit u une classe de nombres réels, ou complexes d'ordre quelconque. Par la considération des nombres infiniment proches, on a récemment introduit en Analyse un certain nombre de classes qui dépendent de u, et qui jouent maintenant un grand rôle dans les questions les plus difficiles de cette science. Elles sont

$D u =$ « la classe dérivée de u » considérée la première fois par M. Cantor.
$C u = u \cup D u =$ « la classe u fermée »
$I u = u - D(-u) =$ « la classe intérieure à u »
$E u = I(-u) =$ « la classe extérieure à u »
$L u = (-I u)(-E u) =$ « la classe limite des u »
med $u =$ « la classe formée des nombres moyens entre les u ».

Exemples.

1. num Np $= \infty$

« le nombre des nombres premiers est infini ».

2. $a \varepsilon \mathrm{N}^2 . = .$ num $(\mathrm{N} \frown a/\mathrm{N}) \varepsilon 2\mathrm{N} - 1$

« Si a est un nombre carré, le nombre des nombres qui divisent a est impair, et réciproquement ».

3. $\min N = 1$. $\max N = \Lambda$

« Le plus petit des N est 1 ; il n'y a pas de plus grand ».

4. $a \varepsilon N + 1 . \supset . \min [(N + 1) \frown (a ! + 1)/N] \varepsilon Np \frown (a + N)$

« Si a est un nombre plus grand que l'unité, le plus petit des nombres supérieurs à l'unité, qui divise $a ! + 1$, est un nombre premier plus grand que a ».

5. $[\Pi (N \frown a/N)]^2 = a^{\text{num} (N \frown a/N)}$

« Le carré du produit des nombres diviseurs de a est égal au nombre a élevé à la puissance indiquée par le nombre des nombres diviseurs de a ».

§ 20. Quelquefois on indique une fonction de x en écrivant un signe après x. Ainsi on écrit $x!$ pour indiquer la factorielle de x. Dans le plus grand nombre des langues on écrit le signe de fonction après la variable, comme γραμμῆς πέρατα, lineæ extrema, Liniengrenze. Ainsi, en chinois, *ji-tseu* signifie « du soleil le fils » ou « le jour ».

Si l'on écrit les signes de fonctions après la variable, chaque formule contient les opérations dans l'ordre même dans lequel on les exécute; les opérations seront indiquées en ordre inverse, si l'on écrit les signes des opérations en-avant. Ainsi pour calculer $\log \sin \sqrt{x}$, on doit de x prendre la racine, du résultat le sin, et du résultat le log. Et pour calculer la limite du rapport de l'accroissement d'une fonction à l'accroissement de la variable (dérivée de la fonction), il faut donner à la variable un accroissement, calculer l'accroissement de la fonction, former le rapport et passer à la limite.

L'usage commun en Mathématique, c'est de prémettre le signe de l'opération.

Quelquefois on indique une fonction par une écriture plus compliquée, comme $|a|$ (pour mod a), a^2, ...; car on ne peut pas leur appliquer la convention de l'inversion (§ 27). Il est bien, dans les notations nouvelles, d'adopter toujours des suites de signes écrits sur la même ligne; on obtient non-seulement des avantages théoriques, mais une simplicité typographique, qui a son importance.

§ 21. Il faut bien distinguer les noms des classes des noms des opérations. Ainsi les propositions « x est un multiple » « x est un diviseur » « x est un logarithme » n'ont pas de sens; car multiple, diviseur, logarithme sont des noms de fonctions, et non de classes. Quelquefois on dit « x est un sinus » pour indiquer « x est le sinus de quelque arc ». On traduira cette formule par « $x \varepsilon \sin q$ » et non par « $x \varepsilon \sin$ »; car sin est une opération, et sin q est une classe, l'intervalle $(-1) \vdash 1$.

Mais dans bien des cas dans le langage commun, le même nom, selon la position ou forme grammaticale, est tantôt le nom d'une classe, tantôt celui d'une fonction. Par exemple (*) dans le mot allemand *Rathhaus* (la maison du conseil), *Rath* (conseil) est le nom d'une classe, ou d'un individu si le conseil est déterminé, et *haus* (la maison du) est le nom d'une fonction ; et dans le mot *Hausrath*, *Haus* est le nom d'une classe, et *rath* celui d'une fonction. On voit qu'on ne peut pas changer la place des mots *Haus* et *Rath*, comme on n'a pas $\log \sin x = \sin \log x$; bien que, si a et b sont des classes, on ait toujours $ab = ba$.

Dans la phrase « le nombre des nombres diviseurs de 12 est 6 » le mot « nombre » est d'abord le signe d'une fonction, puis celui d'une classe. On la traduit par $\text{num}\,(\text{N} \cap 12/\text{N}) = 6$, en le substituant dans le premier cas par num, dans le second par N.

Mais on pourrait aussi imiter le langage ordinaire, et au lieu de former de nouveaux signes de fonctions, on peut prendre un signe φ, qui a déjà une signification, présentant quelque analogie avec la fonction qu'on désire indiquer, et écrire $\varphi\text{‘}x$ pour indiquer cette fonction de x. On peut traduire le signe ‘ par le mot *de*. Ce signe indique que φ doit être interprété dans une nouvelle signification, qu'il faut expliquer dans chaque cas. Au lieu de $\varphi\text{‘}x$ on peut écrire $x\text{’}\varphi$, si l'on désire avoir le signe de fonction après la variable (**).

Par ex. on peut indiquer par $\text{N‘}\,u$ (le nombre des u), ou par $u\text{’}\,\text{N}$ (des u le nombre), ce qu'on a déjà indiqué, avec une nouvelle notation, par $\text{num}\,u$. Pourtant N représente une classe, et N‘ c'est un signe d'opération.

Si u est une K de quantités, on pourra indiquer par $+\text{‘}\,u$ et $\times\text{‘}\,u$ (ou par $u\text{’}+$ et $u\text{’}\times$) la somme et le produit des u, qu'on a déjà indiqués par les notations $\Sigma\, u$ et $\Pi\, u$.

Si f est un signe d'opération qu'on écrit en-avant de la variable, on peut convenir que $x\text{’}f$ indique la même chose que fx ; et si le signe f s'écrit après la variable, on peut convenir que $f\text{‘}x$ soit identique a xf. Ainsi $x\text{’}\log = \log x$, $!\text{‘}\,x = x!$

Mais la seule application qu'on a faite du signe ‘, c'est la suivante: si u est une classe de classes, c'est-à-dire un ensemble des classes,

$\cup\text{‘}\,u$ indique « la plus petite classe contenant toutes les classes du système u » ou « la somme logique des classes u »

$\cap\text{‘}\,u$ indique « la plus grande classe contenue dans toutes les classes du système u » ou « le produit logique des classes u ».

(*) C'est l'exemple porté par M. Wundt, *Logik*, Stuttgard, 1880, pag. 223; mais il en tire des conclusions différentes.

(**) Le signe ’ est, à peu près, le signe du génitif anglais.

Par ex. si $u \varepsilon \mathrm{Kq}$, $D^{\mathrm{N}} u$ représente l'ensemble des classes Du, D^2u, D^3u, ..; donc $\cap \text{‘} D^{\mathrm{N}} u$ représente ce qui est commun à toutes les classes dérivées de u. M. Cantor l'appelle classe dérivée d'ordre infini.

Si u est un faisceau de rayons, $\cup \text{‘} u$ représente son plan, et $\cap \text{‘} u$ son centre (Voir § 31).

Des hypothèses

$$a \varepsilon b \,.\, b \varepsilon c$$

on déduit

$$a \varepsilon \cup \text{‘} c \,.$$

§ 22. On a aussi à considérer des fonctions de deux ou de plusieurs variables. Quelquefois on indique la fonction par un signe entre les deux variables ; ainsi en Algèbre on écrit

$$a + b \,,\, a - b \,,\, a \times b \,,\, a/b$$

pour représenter des fonctions des nombres a et b ; et en Logique, si a et b sont des classes, $a \cap b$ et $a \cup b$ en désignent des fonctions.

Mais d'ordinaire on considère le couple des objets a et b comme un nouveau objet, qu'on indique par $(a \,, b)$; et l'on écrit un signe de fonction f en avant du couple $(a \,, b)$. Ainsi dans le Formulaire on a les notations

$\mathrm{D}(a \,, b) =$ « le plus grand commun diviseur entre a et b »
$\mathrm{m}(a \,, b) =$ « le plus petit multiple commun de a et de b »
$\mathrm{quot}(a \,, b) =$ « le quotient de la division de a par b »
$\mathrm{rest}(a \,, b) =$ « le reste » »
$\mathrm{mp}(b \,, a) =$ « l'exposant de la plus grande puissance de b contenue dans a ».

Exemples :

$$a \,, b \,, c \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{D}(ac \,, bc) = c\, \mathrm{D}(a \,, b) \,.$$

« Étant $a \,, b \,, c$ des nombres, le plus grand commun diviseur entre ac et bc est égal au plus grand commun diviseur entre a et b , multiplié par c ».

$$a \,, b \,, c \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \mathrm{D}(a \,, b) = 1 \,.\, \supset .\, \mathrm{D}(ac \,, bc) = c \,.$$

« Si a , b , c sont des nombres, et a est premier avec b, alors le plus grand commun diviseur entre $a c$ et $b c$ est c ».

$$a \,, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset \therefore a \varepsilon \mathrm{N} b \,. = : x \varepsilon \mathrm{Np} \,.\, \supset_x .\, \mathrm{mp}(x \,, b) \leqq \mathrm{mp}(x \,, a) \,.$$

« Étant a et b des nombres, affirmer que a est un multiple de b, c'est comme affirmer que, quel que soit le nombre premier x , la plus grande puissance de x contenue dans b est inférieure ou égale à la plus grande puissance de x contenue dans a ».

Dans quelques cas on peut exprimer une fonction nouvelle de deux variables au moyen d'une fonction connue, et d'une fonction nouvelle d'une seule variable. P. ex. dans les traités d'Arithmétique on définit le groupe a/b comme le quotient de a par b. On peut convenir de représenter par $/b$ le réciproque de b, et alors a/b indique le produit de a par le réciproque de b. On a ainsi exprimé la division, opération sur deux variables, au moyen de la multiplication, et de la nouvelle opération « le réciproque de » qui est une fonction d'une seule variable.

Signes de fonction, f *et* ɟ.

§ 23. Comme nous avons déjà dit, pour indiquer une classe qui dépend de x, on a l'habitude d'écrire un signe au-devant de x, comme

$$\log x\,,\ \sin x\,,\ \mathrm{mod}\, x\,,\ \mathrm{num}\, x\,,\ \text{etc.}$$

Le signe qui précède x indique l'opération qu'il faut faire pour avoir le correspondant de x.

En Analyse, on indique le signe, ou caractéristique de fonction, par une lettre, f, φ, F, g, h, ...; et on a l'habitude d'écrire entre parenthèses la variable x. Ainsi on écrit $f(x)$ par crainte de le confondre avec le produit fx de f par x (qui n'a pas de sens). En suivant cette convention, il faudrait écrire $f((x+h))$, pour ne pas le confondre avec $f(x+h)$, qui a la même forme du produit de f par $x+h$. Mais aucune confusion n'est possible; et dans le Formulaire on a cru bien d'écrire tout simplement fx, en suivant Lagrange, Abel et bien d'autres, pour indiquer la valeur correspondante de x. Les parenthèses serviront toujours à grouper des symboles, et ainsi on ne trouvera jamais entre parenthèses une lettre seule.

Dans la formule fx pour désigner une fonction de x, on a à considérer les deux signes f et x, et leur groupement fx. Le x est la variable indépendante; le f est le signe de la fonction, ou opération, qu'il faut considérer, ou de la correspondance entre x et fx, ou de la transformation. Le groupe fx représente la valeur de la fonction correspondante à la valeur x de la variable. Dans nos questions nous parlerons toujours du signe d'opération f, et non de la valeur fx; c'est-à-dire, nous dirons, dans chaque cas, ce que représente la lettre f, et non ce que représente le complexe fx, dont la signification est conséquence des significations de f et de x.

Étant donné un signe h, d'opération, ou de fonction, ou de correspondance (car ces mots signifient la même chose), il y a à considérer la classe des individus sur lesquels on peut opérer avec le signe h, et la classe des individus que l'on obtient comme résultat.

Si a et b sont des classes, pour indiquer « signe d'opération qui étant écrit en-avant d'un a produit un b », on a proposé la notation b/a (*). Il en résulte que si $x \varepsilon a$, et si h est un signe qui étant écrit en-avant d'un a produit un b, on aura $f x \varepsilon b$. Et comme $f x$ a la même forme que le produit de f par x, il est naturel d'indiquer f par une notation analogue à celle du quotient de b par a. Mais cette notation peut produire des ambiguités; et il faut se garder d'adopter les signes d'Algèbre comme signes de Logique. Nous écrirons donc $b \, \mathrm{f} \, a$ pour « signe de fonction, qui étant écrit en-avant d'un a produit un b » ou « opération qui transforme les a en b » ou « correspondance entre les a et les b » ou « b fonction définie dans a », ou « b fonction des a ».

Exemples :

$$\sin \varepsilon \, \mathrm{q} \, \mathrm{f} \, \mathrm{q}$$

« le sin est une opération qui, à chaque nombre réel, fait correspondre un nombre réel ».

$$\log \varepsilon \, \mathrm{q} \, \mathrm{f} \, \mathrm{Q}$$

« log est un signe de fonction réelle définie pour toutes les valeurs positives de la variable ».

$$\mathrm{mod} \, \varepsilon \, \mathrm{Q}_0 \, \mathrm{f} \, \mathrm{q}'$$

« le signe mod établit une correspondance entre les quantités imaginaires et les quantités positives, ou nulles ».

Au lieu de considérer des signes de fonction écrits en-avant de la variable, on pourrait les écrire toujours après. Nous écrivons $a \, \mathrm{J} \, b$ pour « signe de fonction, qui étant écrit après un a produit un b »; ainsi on a :

$$! \, \varepsilon \, \mathrm{N} \, \mathrm{J} \, \mathrm{N}$$

« le signe ! écrit après un N, produit un N ». Mais nous en ferons bien peu d'usage.

§ 24. Les signes des fonctions satisfont à plusieurs propriétés, que nous examinerons rapidement.

1. $a, b \, \varepsilon \, \mathrm{K} \, . \, h \, \varepsilon \, b \, \mathrm{f} \, a \, . \, x \, \varepsilon \, a \, . \supset . \, h x \, \varepsilon \, b$

« Étant a, b des classes, si h est une transformation des a en b, et si x est un a, alors hx est un b ».

Ainsi $h \, \varepsilon \, \mathrm{q} \, \mathrm{f} \, \mathrm{q}$ signifie « h est le signe d'une fonction réelle définie

(*) On a adopté cette notation seulement dans les premières parties du Formulaire

pour toutes les valeurs réelles de la variable ». Elle est nécessairement à une seule valeur, ou monodrome; car, par la 1, si $x \varepsilon$ q, on déduit $hx \varepsilon$ q. Si h est un signe qui à chaque q fait correspondre plusieurs q, elle est une transformation des q en des classes de q, une (K q) f q.

2. $a, b \varepsilon \mathrm{K} . h \varepsilon b \mathrm{f} a . x, y \varepsilon a . x = y . \supset . hx = hy$.

« Ayant a, b, h la même signification, si x et y sont des a, et $x = y$, on déduit $fx = fy$ ». Ou « dans l'expression fx on peut substituer à x un objet égal ». Cette proposition précise la signification des signes d'opération. Ainsi de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ on ne peut pas déduire « le numérateur de la fraction $\frac{2}{3}$ est égal au numérateur de la fraction $\frac{4}{6}$ ». Dans la langage commun le mot « fraction ». a une double signification; tantôt elle représente l'ensemble de deux nombres écrits l'un sur l'autre, tantôt le rapport des deux nombres. En l'interprétant dans cette dernière signification, fraction est équivalente à « nombre rationnel » ou R; et l'expression « le numérateur de x » n'est point une fonction du nombre rationnel x. Ainsi l'expression: « le deuxième terme de la somme $x + y$ » n'est pas une fonction de la somme $x + y$, mais de la succession des signes x, $+$, y. Dans le calcul géométrique, après avoir défini l'égalité des vecteurs, les expressions « origine d'un vecteur », « ligne d'action d'un vecteur » ne sont pas des fonctions du vecteur.

Si $h \varepsilon b \mathrm{f} a$, à chaque a correspond un b; mais nous n'affirmons point que chaque b soit le correspondant de quelque a. Ainsi on peut écrire également

$$\sin \varepsilon\, \mathrm{q\, f\, q}, \quad \text{et} \quad \sin \varepsilon\, (-1) \vdash\!\dashv (+1)\, \mathrm{f\, q}$$

« sin est une opération qui à chaque quantité réelle fait correspondre une quantité réelle » et « sin fait correspondre à chaque quantité réelle un nombre de l'intervalle de -1 à $+1$ ». En général:

3. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . h \varepsilon b \mathrm{f} a . b \supset c . \supset . h \varepsilon c \mathrm{f} a$.

« Si a, b, c sont des classes, si h est une transformation des a en b, et si la classe b est contenue dans c, alors h est aussi une transformation des a en c ».

Si $h \varepsilon b \mathrm{f} a$, la fonction h est définie dans la classe a. On n'exclut point qu'elle soit aussi définie, ou qu'on puisse la définir pour des valeurs de la variable non comprises dans la classe a.

Ainsi on a

$$\sin \varepsilon\, \mathrm{q\, f\, q}, \quad \text{et} \quad \sin \varepsilon\, \mathrm{q'\, f\, q'}$$

« Sin x est, en Trigonométrie, une fonction réelle de x, définie pour

toutes les valeurs réelles de la variable » et « Sin x est, en Analyse, une fonction imaginaire de la variable imaginaire x ».

En général :

4. $a, b, c \varepsilon \mathrm{K} . h \varepsilon b \mathrm{f} a . c \supset a . \supset . h \varepsilon b \mathrm{f} c$.

« Étant a, b, c des classes, h une transformation des a en b, et si c est contenu dans a, alors h est aussi une transformation des c en b ».

§ 25. On peut lire de plusieurs façons les signes de fonction. Par ex. q f q signifie « fonction réelle d'une variable réelle ». Sont telles, l'élévation au carré, au cube, la fonction sin, etc.

Si a, b sont des q, q f$(a \vdash\!\dashv b)$ signifie « fonction réelle définie dans l'intervalle de a à b ».

Si m est un nombre, q f Z_m signifie « correspondance entre les nombres 1, 2, ... m et les q », c'est-à-dire « suite de m quantités ». Il ne faut pas confondre une « suite de m quantités », q f Z_m, avec une « classe de m quantités », qu'on indiquera par K q $\frown \overline{\mathrm{num}\, m}$. Dans la suite de quantités, il y a la première, la deuxième, ... l' m^e ; il peut y en avoir d'égales ; et leur nombre sera alors inférieur à m. Les quantités d'une classe ne sont pas ordonnées.

Si $h \varepsilon$ q f Z_m, h est un signe de fonction ; $h\,\mathrm{Z}_m$ indique la classe des valeurs de hx, lorsque x varie dans Z_m ; h est la suite des m quantités, $h\,\mathrm{Z}_m$ est l'ensemble des quantités de la suite.

Étant u une suite de m quantités, $u \varepsilon$ q f Z_m, on indique, selon l'usage répandu, la première, la deuxième, ... la m^e des quantités u par

$$u_1, u_2, \ldots u_m,$$

au lieu de les indiquer par $u\,1$, $u\,2$, ... $u\,m$, selon les conventions ci-dessus. Donc $u \varepsilon$ q f Z_m signifie « soient u_1, u_2, ... u_m, m quantités ».

Si $u \varepsilon$ q f Z_m, par $\Sigma_1^m u$, ou $\Sigma_{r=1}^{r=m} u_r$ on désigne leur somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_m$; et par $\Pi_1^m u$, ou $\Pi_{r=1}^{r=m} u_r$ leur produit $u_1 u_2 \ldots u_m$.

Ainsi on a :

$$m \varepsilon \mathrm{N} . u \varepsilon \mathrm{q}' \mathrm{f} \mathrm{Z}_m . \supset . \bmod \Sigma_{r=1}^{r=m} u_r \leq \Sigma_{r=1}^{r=m} (\bmod u_r)$$

$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad . \supset . \bmod \Pi_{r=1}^{r=m} u_r = \Pi_{r=1}^{r=m} (\bmod u_r).$$

« Étant donnée une suite de m quantités imaginaires, où m est un nombre fini, le module de leur somme n'est pas supérieur à la somme des modules des termes ; et le module du produit est égal au produit des modules des facteurs ».

De la même façon on exprime toutes les propositions dans lesquelles se présentent des quantités en nombre quelconque, mais fini.

q f N signifie « suite de quantités correspondantes à la suite illimitée des nombres 1 , 2 , 3 , ... » ou « série à termes réels ».

Q f N signifie « série à termes positifs »
q' f N » « série à termes imaginaires »
q f n » « série illimitée dans les deux sens ».

Si $u \varepsilon$ q f N , et $m \varepsilon$ N , par $(\Sigma u)_m$ on indique aussi ce qu'on a déjà indiqué par $\Sigma_1^m u = u_1 + u_2 + ... + u_m$. Donc étant donnée la fonction u, on en déduit une nouvelle fonction Σu, dont la valeur, lorsque la variable est m, est indiquée par $(\Sigma u)_m$, ou plus simplement par Σu_m. On peut indiquer par Σu_∞ la limite de Σu_m pour $m = \infty$, ou la somme de la série. Analoguement on interprète $\Pi u_m = (\Pi u)_m$, et Πu_∞.

Pour déterminer une fraction continue, il faut aussi donner une N f N, ou suite de nombres positifs. Si $u \varepsilon$ N f N , et m est un N , par $\mathrm{Fc}_m u$ on peut indiquer la valeur de la fraction continue, dont les quotients incomplets sont u_1, u_2, ... u_n ; par $\mathrm{numt}_m u$ et $\mathrm{dnt}_m u$ son numérateur et son dénominateur calculés a l'aide des règles bien connues, et l'on a p. ex.

$$\mathrm{numt}_n u \times \mathrm{dnt}_{n+1} u - \mathrm{numt}_{n+1} u \times \mathrm{dnt}_n u = \pm 1 .$$

Écrivons p au lieu du mot « point » (de le géométrie euclidienne). Alors :

q f p signifie « nombre réel fonction de la position d'un point ». Tel est un potentiel.

p f q signifie « point fonction d'une variable réelle » ou « point mobile ».

p f p signifie « transformation des points en points ». Tels sont le mouvement, la projection et toute transformation géométrique qui, à chaque point fait correspondre un et un seul point.

Des fonctions semblables, croissantes, continues, etc.

§ 26. Il y a des cathégories de fonctions, que nous mentionnerons rapidement.

Étant a et b des K , par $(b \mathrm{f} a)$ sim , on a indiqué dans le Formulaire, les transformations semblables (similes) des a en b, c'est-à-dire telles que à chaque a corresponde un b, et que chaque b soit le correspondant d'un et d'un seul a. On les appelle aussi univoques et réciproques. Ainsi, étant m un nombre,

$(\mathrm{Z}_m \mathrm{f} \mathrm{Z}_m)$ sim signifie « permutation des nombres 1 , 2 , ... m ».

Au contraire $Z_m \mathrm{f} Z_m$ signifie seulement « suite de m nombres pris dans la succession 1, 2, ... m ».

$\log \varepsilon (\mathrm{q}\,\mathrm{f}\,\mathrm{Q})\,\mathrm{sim}$.

Il peut arriver qu'une transformation $b\,\mathrm{f}\,a$ soit telle que à chaque a corresponde un b, et à des individus différents de a, correspondent aussi des individus différents de b. On l'appelle encore Semblable, dans une signification différente de la première, et on l'indique par $(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{Sim}$, en écrivant Sim au lieu de sim. Donc:

1. $a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{K}\,.\,h\,\varepsilon\,b\,\mathrm{f}\,a\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\!\cdot\,.\;h\,\varepsilon\,\mathrm{Sim}\,.=:x\,,y\,\varepsilon\,a\,.\,x -= y\,.\,\mathrm{ɔ}_{x,\,y}\,.\; hx -= hy\,.$

« Étant a, b des classes, et h une transformation des a en b, nous dirons que h est Semblable, si, étant x, y des individus quelconques de a, non égaux, les valeurs hx et hy sont aussi différentes ».

Donc $h\,\varepsilon\,(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{sim}$ signifie que chaque b est le correspondant d'un et d'un seul a; $h\,\varepsilon\,(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{Sim}$ signifie qu'il n'y a pas de b correspondant à deux valeurs différentes de a; c'est-à-dire, chaque b est le correspondant d'un seul, ou d'aucun a.

P. ex. $(\mathrm{q}\,\mathrm{f}\,Z_m)\,\mathrm{Sim}$ signifie « suite de m quantités, deux à deux inégales ».

Il est clair que, si $h\,\varepsilon\,(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{sim}$, elle est aussi $(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{Sim}$; mais non réciproquement.

Si $m\,,n\,\varepsilon\,\mathrm{N}$, $Z_m\,\mathrm{f}\,Z_n$ signifie « suite de n nombres pris dans la série 1, 2, ... m » ou « arrangement avec répétition des nombres Z_m à n à n ».

Si $m > n$, $(Z_m\,\mathrm{f}\,Z_n)\,\mathrm{Sim}$ signifie « suite de n nombres différents pris dans la même série ». ou « arrangement simple des nombres Z_m à n à n ».

Si le nombre des a est fini et égal à celui des b, $(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{sim}$ et $(b\,\mathrm{f}\,a)\,\mathrm{Sim}$ expriment la même chose.

Exemples.

$$m\,,n\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\,\mathrm{num}\,(Z_m\,\mathrm{f}\,Z_n) = m^n$$

$$\text{»}\qquad \mathrm{num}\,[(Z_m\,\mathrm{f}\,Z_n)\,\mathrm{Sim}] = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)$$

$$\text{»}\qquad \mathrm{num}\,[(Z_m\,\mathrm{f}\,Z_m)\,\mathrm{Sim}] = m\,!$$

$$m\,\varepsilon\,\mathrm{N}\,.\,f\,\varepsilon\,\mathrm{q}\,\mathrm{f}\,Z_m\,.\,g\,\varepsilon\,(Z_m\,\mathrm{f}\,Z_m)\,\mathrm{sim}\,.\,\mathrm{ɔ}\,.\,\Sigma_{r=1}^{r=m} fr = \Sigma_{r=1}^{r=m} f(gr)\,.$$

« Étant m un nombre fini, $f1$, $f2$, ... fm une suite de m quantités réelles, et g une permutation des nombres 1, 2, ... m, c'est-à-dire étant $g1$, $g2$, ... gm les mêmes nombres écrits dans un autre ordre, on a:

$$f1 + f2 + \ldots + fm = f(g1) + f(g2) + \ldots + f(gm) \text{ »},$$

ou « dans une somme d'un nombre fini de termes, on peut changer arbitrairement l'ordre des termes ».

Étant u une classe de nombres réels ($u \varepsilon \mathrm{K\,q}$), continue ou discontinue, parmi les fonctions réelles définies pour les valeurs u de la variable, on a à considérer les fonctions croissantes, par abréviation « cres » (crescens), et les décroissantes, par abréviation « dec ».

$$u \varepsilon \mathrm{Kq} . h \varepsilon \mathrm{qf} u . \supset \therefore h \varepsilon \mathrm{cres} . = : x_1 , x_2 \varepsilon u . x_1 < x_2 . \supset_{x_1, x_2} . hx_1 < hx_2$$

$$\text{»} \quad . \supset \therefore h \varepsilon \mathrm{dec} . = : \quad \text{»} \quad \text{»} \quad hx_1 > hx_2 .$$

Exemples:

$\log \varepsilon (\mathrm{q\,f\,Q})$ cres. $\quad \sin \varepsilon \left[\mathrm{q\,f}\left(-\frac{\pi}{2} \vdash\!\dashv \frac{\pi}{2}\right)\right]$ cres. $\quad \cos \varepsilon \mathrm{q\,f}(0 \vdash\!\dashv \pi)$ dec.

On a aussi à considérer les fonctions continues, par abréviation « contin ».

Inversion des fonctions.

§ 27. Si $a , b \varepsilon \mathrm{K}$, et $h \varepsilon b \mathrm{f} a$, et $x \varepsilon a$, posons

$$y = hx .$$

Étant donné y, il peut y avoir une et une seule valeur de x qui satisfait à cette équation; cela arrive si $h \varepsilon$ sim. Nous indiquerons cette valeur de x par $x = \bar{h}\, y$, donc

1. $x = \bar{h}\, y . = . y = hx$

et la fonction $\bar{h}$ s'appelle la fonction *inverse* de h. S'il y a plusieurs valeurs de x qui satisfont à la condition $y = hx$, ces valeurs constituent une classe, que nous indiquerons par $\bar{h}\, y$, et l'on a:

2. $x \varepsilon \bar{h}\, y . = . y = hx .$

S'il n'y a pas de valeur de x qui satisfait à la condition $y = hx$, on aura $\bar{h}\, y = \Lambda$.

Exemples. La relation $y = \log x$, résolue par rapport à x donne $x = \overline{\log}\, y$; donc $\overline{\log}\, y = e^y$, étant e la base des logarithmes.

La relation $y = \sin x$ donne $x \varepsilon \overline{\sin}\, y$, x est un des arcs dont le sinus est y. La relation $\mathrm{mod}\, x = a$, où $a \varepsilon \mathrm{Q}_0$, donne $x \varepsilon \overline{\mathrm{mod}}\, a$; donc $\overline{\mathrm{mod}}\, a$ signifie « ce qui a pour module le nombre a ». Si x est un q_n, $x + \overline{\mathrm{m}}\, a$ signifie « surface sphérique de centre x et de rayon a », et $x + \theta\, \overline{\mathrm{m}}\, a$ signifie « sphère de centre x et de rayon a ».

La relation $\mathrm{num}\, u = a$, où a est un N_0 ou ∞, résolue par rapport

à u, donne $u \varepsilon \overline{\text{num}}\, a$; donc $\overline{\text{num}}\, a$ signifie « classe d'objets en nombre de a ». P. ex. $\text{Np} \varepsilon \overline{\text{num}}\, \infty$ est équivalent à $\text{num}\, \text{Np} = \infty$.

Étant u et v des Kq, la relation $v = Du$ donne $u \varepsilon \overline{D} v$. P. ex.

$$v \varepsilon \text{Kq} . D v \supset v . \supset . \text{num}\, \overline{D} v = \infty .$$

« Si v est une classe de quantités, et elle est fermée, selon Cantor, il y a un nombre infini d'ensembles de points qui ont pour classe dérivée la v ».

Si $a \varepsilon \text{q}$, $\overline{l}' a$ signifie « classe qui a pour limite supérieure le a ; $\overline{l}' \infty$ « classe illimitée supérieurement ».

Quelquefois parmi les valeurs de x qui satisfont à la condition $y = hx$ il y en a une plus importante qu'il faut indiquer par une notation spéciale. Ainsi, si $x \varepsilon \text{Q}$, par $\sqrt[n]{x}$ on entend la racine arithmétique, et par $\sqrt[n]{\;}^{*} x$ on entend l'ensemble des n racines algébriques.

Le signe d'inversion, d'une grande utilité, n'est pas indispensable, car on peut toujours, au lieu des premiers membres des définitions 1 et 2, écrire les seconds.

§ 28. Nous ferons deux applications du signe d'inversion à la Logique.

Soit u une K. En écrivant devant elle le signe $x \varepsilon$, on obtient la proposition $x \varepsilon u$; appelons - la p_x ; c'est-à-dire posons

$$x \varepsilon u . = . p_x .$$

Le signe $x \varepsilon$ est donc un signe d'opération, qui, écrit devant une classe, la transforme en une proposition contenant la lettre variable x.

Réciproquement, soit p_x une proposition contenant la lettre variable x ; il résulte déterminée la classe u formée des valeurs de x qui satisfont à la condition p_x, et l'on aura

$$x \varepsilon u . = . p_x .$$

En résolvant cette équation par rapport à u, on obtient

$$u = \overline{x \varepsilon}\, p_x ,$$

conformément à la notation du § 17.

Soit a une expression contenant une lettre x. Il résulte déterminé un signe de fonction h tel qu'on a

$$h x = a .$$

Si l'on désire donner la signification, non du groupe hx, mais du

signe simple h, il suffit de transporter le signe x dans le second membre, et l'on obtient

$$h = a\bar{x}.$$

Ainsi $a\bar{x}$ désigne le signe de fonction, qui étant écrit devant x, produit l'expression a. On déduit $hy = a\bar{x}y$; donc $a\bar{x}y$ représente ce que devient l'expression a lorsqu'au lieu de x on écrit y.

Par ex. au lieu de dire (selon l'habitude en analyse):

posons $fx = x^2 - 3x$

on peut dire

posons $f = (x^2 - 3x)\bar{x}$

et ainsi on donne la signification du signe simple f.

Ainsi

$$(x^2 - 3x)\bar{x}5 = 10;$$

et $(x^2 - 3x)\bar{x}\mathrm{N}$

représente l'ensemble des valeurs qu'acquiert $x^2 - 3x$, lorsqu'on donne à x toutes les valeurs de la classe N.

Soit toujours a une expression contenant une lettre x. Il résulte aussi déterminé un signe de fonction h tel que $xh = a$; on déduit $h = \bar{x}a$, et $yh = y\bar{x}a$; donc $y\bar{x}a$ désigne aussi ce que devient l'expression a, lorsqu'on substitue y à x. Mais il est, peut-être, plus commode d'adopter le signe, déjà bien connu, de la substitution, et d'écrire $\binom{y}{x}a$ pour désigner ce que devient a, lorsqu' on substitue y à x; et pour indiquer ce que devient a, lorsqu' aux deux lettres x et y on substitue x', y', au lieu de $(x', y')\overline{(x, y)}a$ on peut écrire $\binom{x', y'}{x, y}a$.

P. ex. $\binom{\mathrm{N}}{x}(x^2 - 3x)$

est une autre façon d'indiquer la classe

$$(x^2 - 3x)\bar{x}\mathrm{N}.$$

Remarquons que dans toute substitution, on substitue ou une lettre variable, ou une valeur déterminée, ou une expression quelconque, toujours à la place d'*une* lettre variable, et jamais à celle d'une expression composée. Soit par ex. la formule

(a) $\quad f(x + h) = fx + hf'x + \ldots$

On peut dire: posons $h = a - x$, c'est-à-dire, faisons la substitution $\binom{a - x}{h}$, et l'on a

(*b*) $fa = fx + (a - x)f'x + ...;$

mais l'expression « posons $a = x + h$ », c'est-à-dire, faisons la substitution $\left(\begin{matrix} a \\ x+h \end{matrix}\right)$, donne lieu à des ambiguités. Car de la formule donnée et de $a = x + h$, on peut éliminer h, et l'on obtient la (*b*); on peut éliminer x, et l'on a:

(*c*) $fa = f(a - h) + hf'(a - h) + ...$

et l'on peut aussi déduire des formules différentes.

§ 29. Si a et b sont des K, et $h \varepsilon b \mathrm{f} a$, et si u est une classe contenue dans a, par hu on entend l'ensemble des valeurs que prend la fonction hx, lorsque x prend toutes les valeurs de la classe u. En symboles:

1. $a, b, u \varepsilon \mathrm{K} . u \mathrm{ɔ} a . h \varepsilon b \mathrm{f} a . \mathrm{ɔ} . hu = \overline{y \varepsilon} (x \varepsilon u . y = hx . -=_x \Lambda)$
2. » $. \mathrm{ɔ} \therefore y \varepsilon hu . = : x \varepsilon u . y = hx . -=_x \Lambda .$

La seconde proposition se déduit de la première, en opérant par le signe $y \varepsilon$ les deux membres de l'égalité qui constitue la définition.

On a p. ex.

$\log \mathrm{Q} = \mathrm{q} . \quad \sin \mathrm{q} = (-1) \vdash\!\dashv (+1) .$

Nous avons déjà appliqué plusieurs fois cette convention, notamment au § 3. Cette convention sert à éliminer une variable d'une proposition, où cette variable figure seulement en apparence. Ainsi la proposition $x \varepsilon u . y = hx . -=_x \Lambda$ est une relation entre les lettres u, y et h, indépendante de la lettre x qui figure au pied du signe $=$; elle est transformée en $y \varepsilon hu$, où ne figure plus le x. Analoguement, étant u, v des K, et h un signe de fonction,

3. $hu \mathrm{ɔ} v . = : x \varepsilon u . \mathrm{ɔ}_x . hx \varepsilon v$
4. $(hu) \cap v = \Lambda . = : x \varepsilon u . hx \varepsilon v . =_x \Lambda$
5. $(hu) \cap v -= \Lambda . = : x \varepsilon u . hx \varepsilon v . -=_x \Lambda$

qui transforment les seconds membres, qui sont indépendants de la lettre x, en d'autres formules qui ne contiennent pas le x.

Dans le Formulaire, I, § 5, on trouve quelques autres propositions sur les fonctions des classes.

Cette convention est très utile, comme on a déjà vu; elle ne donne jamais lieu à des ambiguités en Algèbre; mais il n'est pas exclu que des ambiguités ne puissent se produire. Car nous n'avons pas défini un signe nouveau, mais bien un groupe hu de signes, et il faut s'assurer que ce groupe n'a pas encore reçu de signification.

Pour ôter cette crainte d'ambiguité, on pourrait introduire un signe

nouveau, pour noter qu'on a fait usage de cette convention. Mais il est plus commode de s'en servir lorsqu'il n'y a aucune ambiguité, et s'en abstenir dans le cas contraire, car cette convention n'est pas nécessaire.

Comme application à la logique, $x \frown a$, ou xa, où x et a sont des classes, représente, quel que soit x, une classe contenue dans a; et en variant x, elle les représente toutes; car si $b \supset a$, il suffit de faire $x = b$, et l'on a $ba = b$. Donc $\mathrm{K} \frown a$, ou $\mathrm{K}a$ signifie « classe de a » ou « une classe contenue dans a », selon ce qu'on dit à la fin du § 2. Il ne faut pas lire $\mathrm{K}a$ par « la classe des a », qui signifie simplement « a ».

Les fonctions répétées s'indiquent par des exposants; ainsi h^2x, $h^3x, \ldots$ signifient hhx, $hhhx, \ldots$. Ainsi on écrit d^2y, $\mathrm{d}^3y, \ldots$ pour indiquer les différentielles de y, et D^2y, $\mathrm{D}^3y, \ldots$ pour les dérivées. Les règles des exposants sont conservées. (Voir *Formulaire*, 1, § 5, P15 et suiv.).

Les Auteurs anglais écrivent aussi $\sin^{-1}x$ pour $\overline{\sin}\, x$. Mais alors il faut renoncer aux écritures hybrides $\sin^2 x$ pour $(\sin x)^2$ et analogues (*). Avec $\log^2 x$ on entendra $\log \log x$.

Relations.

§ 30. On indique quelquefois une relation entre deux objets au moyen d'un signe, que nous appelons signe de relation, écrit entre les objets. Ainsi en Algèbre on a les relations

$$a = b\,, \quad a > b\,, \quad a < b\,, \quad \ldots$$

et en Logique,

$$a \,\varepsilon\, b\,, \quad a \supset b\,, \quad \ldots$$

On peut, au moyen des notations précédentes et sans introduire des notations nouvelles, représenter quelques relations. Ainsi

nul a est b	s'exprime par	$a \frown b = \Lambda$
quelque a est b	»	$a \frown b - = \Lambda$
le nombre a est premier avec b	»	$\mathrm{D}(a, b) = 1$.

Nous avons déjà dit au § 9, que si $x \,\alpha\, y$ est une relation entre x

(*) M. Stolz, dans ses *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* écrit $\sin x^2$ au lieu de $(\sin x)^2$; tous les Auteurs écrivent $\mathrm{d}x^2$ au lieu de $(\mathrm{d}x)^2$.

et y, sa négation $-(x\alpha y)$ s'indique par $x - \alpha y$; le signe $-\alpha$ représente la *négative* de la relation α. On a $-(-\alpha) = \alpha$.

Soit $x \alpha y$ une relation entre x et y; étant donné y, il résulte déterminée une classe de x qui satisfont à la relation proposée. Cette classe est une fonction de y; désignons-la par φy; on aura

$$\overline{x \varepsilon}(x \alpha y) = \varphi y \text{;} \qquad \text{d'où} \qquad x \alpha y = x \varepsilon \varphi y;$$

donc le signe de relation α est décomposé dans le signe ε, et le signe de fonction φ, et l'on a $\alpha = \varepsilon \varphi$; et si l'on veut exprimer φ au moyen de α, on a $\varphi = \bar{\varepsilon} \alpha$. Le signe $\bar{\varepsilon}$ correspond au mot *qui*.

Par ex. le signe $>$ en Algèbre signifie « est plus grand que »; donc le signe $\bar{\varepsilon} >$ signifie « plus grand que ». Si a est un q, $\bar{\varepsilon} > a$ est équivalent à la classe qu'on a déjà indiquée plus simplement par $a + \mathrm{Q}$. On a aussi $\bar{\varepsilon} < a = a - \mathrm{Q}$.

§ 31. Appliquons cette décomposition au signe $=$. On peut le décomposer dans le signe ε, et un signe, que nous écrirons ι (ἴσος), et qui signifie *égal*; ainsi $x \varepsilon \iota y$ est la même chose que $x = y$.

Le signe ι, qu'on vient d'introduire, est donc un signe de fonction, qui, écrit en avant d'un individu quelconque x, produit une classe, ιx, la classe des individus qui sont égaux à x. Par ex. $\iota 0$ signifie « égal à 0 », ou « nul ». On a

$$\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \iota 0$$

« N_0 représente l'ensemble des entiers positifs, ou nuls ». Si l'on écrit devant les deux membres $x \varepsilon$, et en appliquant la règle 3 du § 16, on a

$$x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.=.\, x \varepsilon \mathrm{N} \,.\cup.\, x \varepsilon \iota 0$$

c'est-à-dire

$$x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.=.\, x \varepsilon \mathrm{N} \,.\cup.\, x = 0 \,.$$

Donc, à la rigueur, il n'est pas permis d'écrire $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup 0$; car en appliquant la transformation indiquée, on obtiendra $x \varepsilon \mathrm{N}_0 \,.=.\, x \varepsilon \mathrm{N} \,.\cup.\, x \varepsilon 0$; et la proposition $x \varepsilon 0$ n'a pas de signification, car 0 n'est pas une classe, mais un individu.

On pourrait croire qu'on peut supprimer toujours le signe ι, ayant soin, lorsqu' on trouve una proposition de la forme $x \varepsilon a$, où a est un individu (comme dans l'exemple donné), de l'interpréter par $x = a$. Mais si cela est permis dans bien des cas, on peut rencontrer des ambiguités.

Nous n'avons jamais défini l'*individu*, ni introduit un signe pour le représenter. Tout objet x est considéré comme un individu, lorsqu'il

figure comme sujet dans la proposition $x \varepsilon u$; la u est alors une K. Une classe u figure comme individu lorsqu'elle figure dans une proposition $u \varepsilon v$; alors la classe v a pour individus des classes; elle est donc une KK, une classe de classes. On peut aussi considérer des KKK, ou classes de classes de classes, etc.

Écrivons par exemple p au lieu de « point de l'espace ». En Géométrie les points sont toujours considérés comme des individus, οὗ μέρος οὐθέν, selon Euclide. Avec les points on forme des Kp, ou figures géométriques, lignes, surfaces, solides. Si b est une droite, $a \varepsilon b$ signifie « a est un point de la droite b ». Avec des droites on forme des classes, par exemple un complexe c. Alors $b \varepsilon c$ signifie « b est une droite du complexe c », donc c est une classe dont les individus sont des classes de points; c est donc une KKp. Écrivons d au lieu des mots « complexe linéaire ». Alors $c \varepsilon d$ signifie « c est un complexe linéaire »; d est une classe dont les individus sont des complexes, c'est-à-dire des KKp; donc d est une KKKp.

Or, si a est une classe, les relations

$$x \varepsilon a$$

et $$x \varepsilon \iota a \quad (x = a),$$

ont des significations différentes.

Si a et b sont des droites, $a \cup b$ signifie l'ensemble des points qui se trouvent ou sur a ou sur b; elle est une classe de points; et $\iota a \cup \iota b$ signifie l'ensemble des deux droites, c'est-à-dire la classe qui a pour individus la droite a et la droite b.

Des signes $|$, $\uparrow$ *et* $\downarrow$.

§ 32. Les signes que nous venons d'expliquer sont suffisants, et on pourrait faire à moins de plusieurs conventions précédentes. Maintenant nous en expliquerons encore quelques-unes, au moyen desquelles on peut présenter sous un noveau point de vue les questions déjà étudiées.

Soit $x \alpha y$ une relation entre x et y. Nous poserons

1. $y \alpha | x = x \alpha y$.

Donc $\alpha |$ représente la relation appelée *inverse* de la α. Par exemple $>|$ signifie $<$, $<|$ signifie $>$, $\supset |$ signifie $\subset$, etc. Une relation s'appelle *symétrique*, si elle est identique avec son inverse. Sont telles les relations indiquées par $=$, « est premier avec », « est parallèle à », « est perpendiculaire à », etc.

Décomposons le signe de relation α dans le signe ε et le signe d'une fonction φ, comme on a dit au § 30. La relation inverse de $\varepsilon\varphi$ est

indiquée par $(\varepsilon\varphi)|$; peut-on l'indiquer par $\varepsilon(\varphi|)$? Cette formule n'a pas encore de signification. Nous pouvons donc poser $\varepsilon(\varphi|) = (\varepsilon\varphi)|$.

Cette convention est un cas particulier de cette autre. Si a, b, c sont des signes quelconques, et si $(ab)c$ a une signification, mais $a(bc)$ en est encore dépourvue, on posera, par définition, $a(bc) = (ab)c$, et leur valeur commune s'indiquera par abc, en supprimant les parenthèses devenues inutiles.

On a donc:

$$x \varepsilon \varphi y . = . y (\varepsilon \varphi) | x . = . y \varepsilon (\varphi |) x . = . y \varepsilon \varphi | x .$$

On déduit

$$\varphi | x = \overline{y \varepsilon} (x \varepsilon \varphi y) .$$

La fonction $\varphi|$ est une fonction inverse de φ; mais elle n'est pas identique à celle indiquée par $\overline{\varphi}$ dans le § 27, prop. 2; car on a:

$$y \varepsilon \overline{\varphi} x . = . x = \varphi y .$$
$$y \varepsilon \varphi | x . = . x \varepsilon \varphi y .$$

On peut exprimer $\overline{\varphi}$ au moyen de φ, ι et $|$. En effet $x = \varphi y$ se transforme en $x \varepsilon \iota \varphi y$, d'où, en envertissant avec le signe $|$, $y \varepsilon (\iota \varphi) | x$; donc $\overline{\varphi}$ signifie la même chose que $(\iota \varphi)|$. (*)

§ 33. Soient u et v des classes. Nous écrirons

$x \alpha \uparrow v$	au lieu de	« x est dans la relation α avec chaque v »
$x \alpha \downarrow v$	»	» quelque v »
$u \uparrow \alpha y$	»	« chaque u est dans la relation α avec y »
$u \downarrow \alpha y$	»	« quelque u » »

On peut lire les signes $\uparrow$ et $\downarrow$ par *chaque* et *quelque*. En symboles on a:

1. $x \alpha \uparrow v . = : y \varepsilon v . \supset_y . x \alpha y$
2. $x \alpha \downarrow v . = : y \varepsilon v . x \alpha y . - =_y \Lambda$
3. $u \uparrow \alpha y . = : x \varepsilon u . \supset_x . x \alpha y$
4. $u \downarrow \alpha y . = : x \varepsilon u . x \alpha y . - =_x \Lambda$

On déduit $(\uparrow\alpha)\uparrow = \uparrow(\alpha\uparrow)$, et on peut supprimer les parenthèses en écrivant $\uparrow\alpha\uparrow$. Ainsi $u \uparrow \alpha \uparrow v$ signifie « tout u est dans la relation α avec tout v » et $u \uparrow \alpha \downarrow v$ signifie « tout u est dans la relation α avec quelque v ». L'expression « x n'est dans la relation α avec aucun v » s'exprime par $x(-\alpha)\uparrow v$; « aucun u n'est dans la relation α avec y » par $u \uparrow (-\alpha) y$.

(*) Dans quelques-uns de mes travaux j'ai écrit φ' au lieu de $\varphi|$.

On a aussi les identités

$$-(\alpha\uparrow)=(-\alpha)\downarrow\ ,\ -(\alpha\downarrow)=(-\alpha)\uparrow\ ,\ -(\uparrow\alpha)=\downarrow(-\alpha)\ ,\ -(\downarrow\alpha)=\uparrow(-\alpha),$$

d'où

$$-(\uparrow\alpha\uparrow)=\downarrow(-\alpha)\downarrow\ ,\ -(\uparrow\alpha\downarrow)=\downarrow(-\alpha)\uparrow\ ,\ \text{etc.}$$

qui donnent lieu à la règle: « La négation d'une relation α combinée avec les mots *quelque* et *chaque*, s'obtient par la négation de α et en échangeant les *quelque* en *chaque*, et réciproquement ».

Exemples:

$a\downarrow\varepsilon\, b$	signifie	quelque a est b,	ou	$ab -= \Lambda$,
$a\uparrow\varepsilon\, b$	»	tout a est b,	ou	$a \supset b$,
$a = \downarrow b$	»	a est égal à quelque b,	ou	$a\,\varepsilon\, b$,
$a\downarrow = b$	»	quelque a est égal à b,	ou	$b\,\varepsilon\, a$
$a\downarrow = \downarrow b$	»	quelque a est égal à quelque b,	ou	$ab -= \Lambda$.
$a\uparrow = \downarrow b$	»	tout a est égal à quelque b,	ou	$a \supset b$.

Si a et b sont des Kq, $a\uparrow > \uparrow b$ signifie « tout nombre de la classe a est plus grand que tout nombre de la classe b ». Sa négative, $a\downarrow \leqq \downarrow b$, signifie « quelque a est plus petit, ou égal, à quelque nombre de l'ensemble b ».

Les relations

$$x\,\varepsilon\,\varphi\downarrow v\ ,\ x\,\varepsilon\,\varphi\uparrow v$$

signifient $x(\varepsilon\varphi)\downarrow v$ et $x(\varepsilon\varphi)\uparrow v$. Les formules $x\,\varepsilon\,(\varphi\downarrow)v$ et $x\,\varepsilon\,(\varphi\uparrow)\,v$ n'ont pas de signification. Nous pouvons convenir de poser

$$x\,\varepsilon\,(\varphi\downarrow)\,v\,.=.\,x\,\varepsilon\,\varphi\downarrow v\ ,\qquad x\,\varepsilon\,(\varphi\uparrow)\,v\,.=.\,x\,\varepsilon\,\varphi\uparrow v,$$

ou

$$\varphi\downarrow v = \overline{x\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\,\varphi\downarrow v)\ ,\ \varphi\uparrow v = \overline{x\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\,\varphi\uparrow v),$$

ou encore, en substituant à $x\,\varepsilon\,\varphi\downarrow v$ et $x\,\varepsilon\,\varphi\uparrow v$ leur signification,

5. $\varphi\downarrow v\,.=.\,\overline{x\,\varepsilon}\,(x\,\varepsilon\, v\,.\,x\,\varepsilon\,\varphi y\,.-=_y \Lambda)$
6. $\varphi\uparrow v\,.=.\,\overline{x\,\varepsilon}\,(y\,\varepsilon\, v\,.\supset_y.\,x\,\varepsilon\,\varphi\, y)$.

Nous avons déjà vu que $x = \downarrow v$, ou $x\,\varepsilon\,\iota\downarrow v$ signifie simplement $x\,\varepsilon\, v$. Donc les deux signes $\iota\downarrow$ se détruisent.

Réduction d'une théorie en symboles.

§ 34. On peut réduire toute théorie en symboles, car tout langage parlé, et toute écriture, est un symbolisme, ou une suite de signes qui représentent des idées. Pour appliquer les signes que nous avons

expliqués, on peut prendre les propositions de la théorie dont il s'agit, écrites en langage ordinaire, et substituer au mot *est* les signes ε, $=$, $\supset$, selon les cas, et au lieu de *et*, *ou*, ... les signes $\cap$, $\cup$, ...; et cela *cum granu salis*, car nous avons vu p. ex. que, selon la position, la conjonction *et* est représentée par $\cap$ ou par $\cup$.

Après cette première transformation, les propositions sont exprimées par quelques mots, liés par les signes de logique $\cap$, $\cup$, $=$, $\supset$, etc.; et si cela a été bien fait, les mots qui restent, sont dépourvus de toute forme grammaticale; car toutes les relations de la grammaire s'expriment au moyen des signes de logique. Ces mots représentent les idées propres de la théorie qu'on étudie. Alors on analyse les idées représentées par ces mots, on décompose dans les parties simples les idées composées, et seulement, après une longue suite de réductions et de transformations, on obtient un petit groupe de mots, qu'on peut considérer comme minimum, par lesquels, combinés avec les signes de logique, on peut exprimer toutes les idées et les propositions de la science qu'on étudie.

Réciproquement, pour transformer les formules en langage ordinaire, c'est-à-dire pour *lire* les formules, il est bien de ne pas lire chaque signe séparément; mais de lire tout un groupe de signes avec le mot qui représente dans notre langage l'idée composée avec ces signes. Ainsi 2N signifie « les produits de 2 par les entiers positifs » mais on le lira « nombre pair positif » ou « nombre pair » s'il n'y a pas d'ambiguité à craindre.

Si x est un q_n et h un Q, $x + \theta\,\overline{\mathrm{m}}h$ signifie « ce qu'on obtient en ajoutant à x le produit d'un nombre compris entre 0 et 1 par un complexe dont le module est h »; mais on le lira « la sphère de centre x et de rayon h » ou « un entour du point x ». On voit donc qu'il n'y a pas de nécessité de représenter ces idées composées par des signes nouveaux.

Si a est une classe, $a - = \Lambda$ signifie « la classe a n'est pas égale au rien »; mais on lira « les a existent », « il y a des a », « on peut déterminer un a », « prenons un a », etc.

Avec un peu d'habitude on transforme tout de suite les symboles en langage et réciproquement.

§ 35. Comme exemple nous voulons transformer en symboles cette proposition: « La probabilité d'un événement composé est le produit de la probabilité du premier événement par la probabilité qu'acquiert le second quand on sait que le premier est arrivé » (*).

(*) Bertrand, *Calcul des probabilités*, 1889, pag. 26.

Par les signes d'arithmétique elle devient

(probab. évén. comp.) = (prob. premier éven.) $\times$ (prob. qu'acquiert ...)

Pour faire disparaître les mots *premier* et *second*, on introduit les lettres variables:

$a, b \varepsilon$ (événements) . Ɔ . (prob. événement composé avec a et b) = (prob. a) $\times$ (prob. qu'acquiert b quand on sait que a est arrivé).

Maintenant il reste à analyser les idées indiquées par les mots entre parenthèses.

Les événements ou cas possibles (boules contenues dans une urne), forment une classe s, variable de question à question, et quelquefois aussi dans la même question. Les cas favorables (boules rouges), forment une classe a contenue dans s, une Ks, et la probabilité de a est num a/num s. On suppose num s fini, et que les cas de s soient également probables.

Donc on peut traduire « événement » par K, « événement composé avec a et b » par $a \frown b$, « probabilité de a » par « num a/num s », et « probabilité qu'acquiert b quand on sait que a est arrivé » par « nombre des b qui sont a, divisé par le nombre des s qui sont a », ou, en observant que $s \frown a = a$, par num $(a \frown b)$/num a.

Après cela la proposition devient

$$s \varepsilon \mathrm{K} . a, b \varepsilon \mathrm{K}s . Ɔ . \frac{\mathrm{num}\,(a \frown b)}{\mathrm{num}\, s} = \frac{\mathrm{num}\, a}{\mathrm{num}\, s} \times \frac{\mathrm{num}\,(a \frown b)}{\mathrm{num}\, a},$$

qui est une identité arithmétique.

Si l'on pose prob (a, s) = num a/num s, la formule prend la forme

$$s \varepsilon \mathrm{K} . a, b \varepsilon \mathrm{K}s . Ɔ . \mathrm{prob}\,(a \frown b, s) = \mathrm{prob}\,(a, s) \times \mathrm{prob}\,(a \frown b, a).$$

P. ex. la probabilité pour qu'un nombre tiré au hasard entre les nombres de 1 à 10 soit pair, est

$$\mathrm{prob}\,(\mathrm{Z}_{10} \frown 2\mathrm{N}, \mathrm{Z}_{10}) = 1/2 .$$

La probabilité que le nombre tiré soit multiple de 3 est

$$\mathrm{prob}\,(\mathrm{Z}_{10} \frown 3\mathrm{N}, \mathrm{Z}_{10}) = 3/10 .$$

La probabilité pour qu'un nombre tiré entre les nombres paires de 1 à 10 soit multiple de 3 est

$$\mathrm{prob}\,(\mathrm{Z}_{10} \frown 2\mathrm{N} \frown 3\mathrm{N}, \mathrm{Z}_{10} \frown 2\mathrm{N}) = 1/5 .$$

La probabilité pour qu'un nombre tiré au hasard entre les nombres Z_{10} soit en même temps multiple de 2 et de 3, est le produit de la première par la troisième probabilité.

Ce qu'on a appelé *probabilité*, quelquefois s'appelle *titre* de la

monnaie, ou *escompte*, etc. et c'est toujours le rapport entre le nombre, poids, valeur ... d'une partie d'un objet à celui de l'objet entier (*).

Définition.

§ 36. La forme la plus simple d'une définition, en mathématique, est

$$x = a \qquad \text{Def.}$$

où x est un signe qui n'a pas encore de signification, a est un groupe de signes ayant une signification connue; et nous convenons d'écrire le signe simple x au lieu du groupe a. Cette convention est exprimée en écrivant le signe $=$ entre x et a, et Def. à la fin de la ligne. Exemple:

$$\mathrm{Np} = (\mathrm{N}+1) - [(\mathrm{N}+1) \times (\mathrm{N}+1)] \qquad \text{Def.}$$

Aux mots « nombre premier » on attribue la signification de « nombre plus grand que l'unité et qu'on ne peut pas décomposer dans le produit de deux nombres plus grands que l'unité ».

Sauf l'importance, ont la même nature des définitions les positions qu'on fait dans un raisonnement quelconque, lorsque, par abréviation, on désigne par une lettre toute une formule.

§ 37. Quelquefois ce qu'on définit n'est pas un signe simple, mais bien un groupe de signes, entre lesquels il y a des signes nouveaux, ou un groupe de signes qui ont séparément une signification, mais tels que leur ensemble n'a pas encore de signification. Alors la définition suit une hypothèse, h, et a la forme:

$$h \,.\, \supset .\, x = a \qquad \text{Def.}$$

« dans l'hypothèse h, nous écrirons le groupe nouveau x au lieu du groupe a ». Par ex.

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{N} \,.\, \supset .\, \mathrm{quot}\,(a\,,b) = \max\,[\mathrm{N}_0 \cap \overline{x\,\varepsilon}\,(xb \leqq a)] \qquad \text{Def.}$$

« Si a et b sont des nombres entiers positifs, par quot $(a\,,b)$ nous entendons le plus grand des nombres positifs, le 0 compris, tels que leur produit par b ne surpasse pas a ». Nous n'attribuons à quot $(a\,,b)$ aucune signification si a et b sont des fractions, ou des imaginaires.

(*) M. Poretsky a appliqué la logique mathématique au calcul des probabilités, dans un intéressant article publié par la Societé Mathématique de l'Université de Kasan, 1887, *Solution du problème général de la théorie des probabilités, au moyen de la Logique mathématique* (en russe).

Comme autre exemple, supposons démontrée la formule

$$x \,\varepsilon\, q \,.\, \supset .\, e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots \qquad (\alpha)$$

et que e^x soit encore dépourvu de signification pour x imaginaire. Nous poserons alors, selon les traités d'Analyse,

$$x \,\varepsilon\, q' - q \,.\, \supset .\, e^x = 1 + x + x^2/2! + \ldots \qquad \text{Def.}$$

« Si x est un nombre imaginaire q', mais non réductible à un nombre réel, par e^x on entend la somme de la série ... ».

Du théorème (α), et de la définition ici donnée, on déduit

$$x \,\varepsilon\, q' \,.\, \supset .\, e^x = 1 + x + x^2/2! + \ldots$$

qui n'est plus une définition.

§ 38. Il y a des idées, qu'on obtient par abstraction, et dont s'enrichissent incessamment les sciences mathématiques, qu'on ne peut pas définir sous la forme énoncée. Soit u un objet; par abstraction on déduit un nouveau objet φu; on ne peut pas former une égalité

$$\varphi u = \text{expression connue,}$$

car φu est un objet de nature différente de tous ceux qu'on a jusqu' à présent considérés. Alors on définit l'égalité, et l'on pose

$$h_{u,v} \,.\, \supset : \varphi u = \varphi v \,.\, = .\, p_{u,v} \qquad \text{Def.}$$

où $h_{u,v}$ est l'hypothèse sur les objets u et v; $\varphi u = \varphi v$ est l'égalité qu'on définit; elle signifie la même chose que $p_{u,v}$, qui est une condition, ou relation, entre u et v, ayant une signification bien connue. Cette relation doit satisfaire aux trois conditions de l'égalité qui suivent:

1. $\varphi u = \varphi u$, c'est-à-dire $p_{u,u}$ doit être vrai, quel que soit u. Une relation telle que chaque objet est dans la relation considerée avec soi-même, s'appelle *réflexe*.

2. $\varphi u = \varphi v \,.\, \supset .\, \varphi v = \varphi u$, c'est-à-dire $p_{u,v} \supset p_{v,u}$. On a appelé *symétrique* une relation telle que, si u est dans cette relation avec v, v soit dans la même relation avec u.

3. $\varphi u = \varphi v \,.\, \varphi v = \varphi w \,.\, \supset .\, \varphi u = \varphi w$, c'est-à-dire $p_{u,v} \,.\, p_{v,w} \,.\, \supset .\, p_{u,w}$. Les relations qui satisfont à cette troisième condition s'appellent *transitives* (*).

Nous dirons que toute relation $p_{u,v}$ qui satisfait à ces trois con-

(*) G. VAILATI, *Le proprietà fondamentali delle operazioni della Logica deduttiva*, Rivista di Matematica, I, p. 127.

On peut énoncer les mêmes conditions sous des formes différentes. Voir E. DE AMICIS, *Dipendenza fra alcune proprietà notevoli delle relazioni fra enti d'un medesimo sistema*. Rivista di Mat. II, p. 113.



ditions a les propriétés de l'égalité; elle donne toujours lieu à une égalité $\varphi u = \varphi v$.

Quelquefois le signe de fonction φ est un signe déjà connu. S'il n'est pas encore connu, on peut introduire le nouveau objet φu, défini seulement par l'égalité, et qu'on introduira s'il y a davantage (*).

L'objet indiqué par φu est donc ce qu'on obtient en considérant dans u toutes et seules les propriétés qu'il a communes avec les autres objets v tels que $\varphi u = \varphi v$.

§ 39. Par exemple, Euclide, au commencement du livre V de ses Éléments, a à sa disposition les grandeurs géométriques, droites, angles, surfaces, et les nombres N. Il s'agit de définir la raison, ou rapport, λόγος, de deux grandeurs, qui est une idée nouvelle. Après quelques explications (déf. 3 et 4), il définit (déf. 5) l'égalité de deux raisons.

En Arithmétique, après avoir développé la théorie des nombres entiers, il s'agit d'introduire les nombres rationnels. Lorsqu'il s'agit de la division entre des N, on pose

$$a, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, b \varepsilon \mathrm{N} a \,.\, \supset .\, b/a = \mathrm{N} \cap \overline{x \varepsilon} (ax = b) \qquad \text{Def.}$$

« Si a et b sont des N, et b est multiple de a, nous écrirons b/a au lieu du nombre qui multiplié par a produit b ». Cette définition est donnée dans l'hypothèse que b soit un multiple de a. En conséquence b/a n'a pas de signification si $b - \varepsilon \mathrm{N}a$.

On peut supprimer cette hypothèse, et donner la définition différente:

$$a, b \varepsilon \mathrm{N} \,.\, \supset .\, b/a = \mathrm{N} \cap \overline{x \varepsilon} (ax = b) \qquad \text{Def.}$$

Alors, quels que soient les N, a et b, a toujours signification la formule b/a; si $b \varepsilon \mathrm{N}a$, elle représente le quot (b, a); si $b - \varepsilon \mathrm{N}a$, on a $b/a = \Lambda$, c'est-à-dire b/a représente le *rien*. Or, puisqu'on veut dans la suite que b/a représente un nombre rationnel, il faut prendre la première définition, et non la seconde.

(*) La relation entre u et v soit algébrique, de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

où f est le signe d'une fonction entière des deux variables. Si elle a les trois propriétés de l'égalité, alors, si l'équation est du premier degré, elle est réductible à la forme $x = y$. Si l'équation est du deuxième degré, est réductible à la forme

$$(x - h)^2 = (y - h)^2$$

À quelle forme sont elles réductibles celles du troisième, quatrième, etc. degré?

Maintenant, si $a, b \varepsilon \mathrm{N} . b - \varepsilon \mathrm{N} a$, l'expression b/a n'a pas de signification. Nous ferons correspondre au couple des deux nombres a et b un nouveau objet, différent de tous ceux qu'on a jusqu'à présent considérés et que nous représentons par b/a; et nous poserons par définition $b/a = d/c . = .$ (par ex. selon M. Stolz (*)) $ad = bc$.

Il faut tout de suite s'assurer que cette relation est réflexe, symétrique et transitive.

Ce qu'on obtient en considérant dans une suite de deux nombres entiers b/a, les propriétés qu'elle a communes avec ses égales, est le nombre rationnel R.

Considérons des ensembles a, b, ... de nombres rationnels. À chaque ensemble a faisons correspondre un nouveau objet, que nous indiquons par l'a; nous ne dirons pas ce que c'est l'a; mais nous poserons par définition:

$$a , b \varepsilon \mathrm{K R} . \supset :: \mathrm{l}' a = \mathrm{l}' b . = .\because x \varepsilon \mathrm{R} . \supset_x : a \frown (x + \mathrm{R}) - = \Lambda . = . b \frown (x + \mathrm{R}) - = \Lambda .$$

« Si a et b sont des ensembles de rationnels, nous dirons que la limite supérieure des a égale la limite supérieure des b, si, quel que soit le nombre rationnel x, s'il y a des nombres de la classe a supérieurs à x, il y a aussi des nombres de la classe b supérieurs à x, et réciproquement ».

Les limites supérieures des K R sont les nombres réels Q, y compris l'∞.

En géométrie, la relation entre deux droites limitées « la droite a peut, après un mouvement, coincider avec la b » a les propriétés des égalités. Elle donne donc lieu à une nouvelle idée, celle de la longueur, ou grandeur d'une droite, et la relation s'écrit gr $a =$ gr b. D'habitude on écrit $a = b$, mais alors avec a et b on n'entend pas les droites, mais bien les longueurs des deux droites.

La relation entre deux droites illimitées « la a est parallèle à la b » a les propriétés de l'égalité. Elle a été transformée en « direction de $a =$ direction de b », ou « point à l'infini de $a =$ point à l'infini de b ». On ne peut pas former une égalité de la forme:

« point à l'infini de a » = « expression composée avec les mots des Éléments d'Euclide ».

La relation entre deux couples de points A, B et A', B' « le couple A, B peut coincider avec le couple A', B' par un mouvement de translation » a les propriétés de l'égalité. On la transforme en

vecteur de A à B = vecteur de A' à B',

(*) *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, I, p. 43.

et ainsi on introduit le *vecteur*, qui est un objet nouveau. Au lieu de « vecteur de A à B » on écrit, selon Grassmann, et aussi selon Hamilton, B—A (*).

De même on ne peut faire une égalité de la forme

Quaternion = « expression composée avec les mots des théories précédentes »,

lorsqu'on considère les quaternions géométriquement. Un quaternion est déterminé par un couple de vecteurs u et v, et on l'indique par $\frac{u}{v}$. On dit que deux quaternions sont égaux, lorsque les triangles formés avec les couples de vecteurs sont dans un même plan, semblables, et du même sens.

Par le même procédé d'abstraction, on obtient les nombres cardinaux et ordinaux infinis de M. Cantor, les points au-delà de l'infini de la géométrie hyperbolique, les formes géométriques de Grassmann, et bien d'autres idées de la plus haute importance dans les Mathématiques. Mais d'autre côté on n'a pas reconnu l'utilité de réduire à la forme d'une égalité toute relation qui en a les propriétés. Ainsi on ne traduit pas la relation « la figure a est semblable à la b » par ex. par « la forme de a est égale à la forme de b ». La projectivité a aussi les qualités de l'$=$.

§ 40. L'égalité $a = b$ a toujours la même signification: a et b sont identiques, ou a et b sont deux noms donnés à la même chose. Quelques Auteurs, lorsqu'on a à étudier une relation qui a les propriétés de l'égalité, la représentent par un nouveau signe dérivé du signe $=$. Par exemple, en Mécanique, on a à considérer

1. des longueurs
2. des segments en longueur et direction, ou vecteurs, comme les axes des couples de forces.
3. des segments, lorsqu'on considère leur longueur, leur direction et la droite qui les contient, comme les forces appliquées à un corps rigide. Ils sont des formes de 2e espèce de Grassmann.

Si A, B, A', B' sont des points, quelque Auteur désigne par un signe l'égalité de AB et de A'B' dans le premier cas; par un autre signe dans le second, et par un troisième signe dans le troisième cas. Ils ont aussi trois sortes d'addition et de soustraction indiquées par

---

(*) La notation A B, encore adoptée par quelqu'un, est moins commode, car elle ne conserve pas les règles de l'Algèbre.

des signes différents, etc. (*) Or, cette complication provient de ce qu'on a indiqué par le même signe AB trois choses différentes. Il suffit de les indiquer par des signes différents, et on pourra employer toujours les mêmes signes $=$, $+$, $-$. Ainsi, selon Grassmann, AB est le troisième objet, $B - A$ le deuxième, et $\mathrm{mod}(B - A)$ le premier.

Si l'on suit avec rigueur les conventions que nous avons expliquées, on pourra toujours, dans chaque formule, substituer à un objet quelconque un objet égal. Nous avons déjà dit (§ 24) pourquoi de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, et de « le numérateur de $\frac{2}{3}$ est 2 » on ne peut pas déduire « le numérateur de $\frac{4}{6}$ est 2 ». Car l'éxpression « numérateur de » n'est pas une NfR.

Analoguement de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, et de « $\frac{2}{3}$ est une fraction irréductible » on ne peut pas déduire « $\frac{4}{6}$ est une fraction irréductible » car l' expression « fraction irréductible » n'est pas une KR.

Les notations, qu'on trouve dans quelques traités, $f(a+0)$ et $f(a-0)$ pour indiquer les limites de $f(a+h)$ et $f(a-h)$, lorsque h, étant positif, tend vers 0, ne satisfont pas aux conditions énoncées; on ne peut pas au lieu de $a+0$ et de $a-0$ écrire la quantité égale a.

§ 41. L'utilité des définitions est bien connue. Mais il faut remarquer que, à la rigueur, elles ne sont pas nécessaires. On peut toujours au lieu de Np écrire ce que représente ce signe. Au lieu de dire « une sphère de centre O et de rayon r coupe une droite, dont la distance à O soit plus petite que r, en deux points », on peut dire « Sur une droite, dont la distance du point O soit plus petite que r, il y a deux points qui sont à la distance r de O ». Chaque proposition sur les nombres irrationnels est une proposition sur les ensembles de rationnels; chaque proposition sur les nombres rationnels se transforme en une proposition entre nombres entiers, etc. L'énonciation des propositions, lorsqu' on substitue à quelques mots leur définition, est un des plus utiles exercices de Logique mathématique.

Une définition n'a pas besoin d'être prouvée. Elle est l'effet de notre volonté, de vouloir représenter un groupe de signes par une expression plus simple. On ne doit par ex. prouver l'existence de ce

---

(*) Budde, *Allgemeine Mechanik*, Berlin 1890, I, pag. 13, II, pag. 568.

qu'on définit. Naturellement il convient dans la pratique de définir des choses existantes; mais quelquefois on définit des choses qui n'existent pas. Ainsi Euclide dans son livre IX, prop. 20, pour prouver que le nombre des nombres premiers est infini, dit: posons $\delta\varepsilon$ = « plus petit commun multiple des nombres premiers ». Et il prouve ensuite que ce qu'il a appelé $\delta\varepsilon$ n'existe pas, c'est-à-dire, c'est le Λ. En Algèbre on fait la même chose, lorsqu'on appelle x une quantité déterminée par des conditions, et après quelques raisonnements on déduit $x = 0$.

Dans le Formulaire il convient d'introduire des définitions, et en conséquence, des signes nouveaux, seulement lorsque cette définition porte une notable simplification. Si l'idée exprimée par un mot dans le langage ordinaire, est exprimable par un groupe de symboles assez simples, il est mieux d'écrire toujours ce groupe, que de le représenter par un signe. A défaut de ce soin, on aura les mêmes propositions exprimées plusieurs fois, en échangeant seulement les notations.

§ 42. On ne peut pas tout définir. Cette proposition, bien connue, résulte aussi de ce que nous avons dit. Pour définir un signe x, il faut pouvoir composer par les signes connus un signe a, tel que l'on ait $x = a$. Donc il faut déjà connaître quelques signes.

La question, qui se présente tant de fois « peut-on définir l'objet x ? » à la rigueur n'est pas bien posée. On la peut mettre sous la forme « peut-on définir x au moyen des objets a, b, c ? » « peut-on former avec les signes a, b, c un groupe de signes égal à x ? » Dans la pratique la question posée signifie seulement « peut-on définir l'objet x au moyen d'idées plus simples ? » et il y a de l'arbitraire dans l'évaluation de la simplicité.

Dans toute science, après avoir analysé les idées, en exprimant les plus compliquées au moyen des plus simples, on en trouve un certain nombre qu'on ne peut plus réduire entre elles, et qu'on ne peut plus définir. Elles sont les *idées primitives* de la science; il faut les acquérir par l'expérience, ou par induction; il est impossible de les expliquer par déduction.

L'étude des idées primitives a été faite sur quelques sujets. En Arithmétique on peut tout définir au moyen des idées primitives représentées par les signes N, 1, +; ce dernier signe figure, comme idée primitive, seulement dans la forme $a+1$ (ou $a+$), pour indiquer le successif de a.

En Géométrie, au moyen des mots « point » et « ligne droite (limitée) » on définit la droite illimitée, le plan, le triangle, le tétraèdre, etc., et l'on développe toute la Géométrie de position.

La distinction des idées en primitives et dérivées a un peu de l'ar-

bitraire. Car, si au moyen de a, b, c on définit d, et au moyen de a, b, d on définit c, on peut prendre pour idées primitives ou a, b, c, ou a, b, d. Des raisons de simplicité décident sur le choix.

On détermine les idées primitives, qu'on ne définit pas, au moyen de leur propriétés fondamentales, comme nous verrons tout de suite.

Les idées primitives d'une science constituent le plus petit dictionnaire qui doit être commun entre deux hommes qui parlent des langues différentes, pour qu'ils puissent s'entendre sur les sujets de cette science.

Démonstrations.

§ 43. Après avoir énoncé les propositions d'une branche des Mathématiques, et reconnu entre elles les définitions, il faut prouver la vérité des autres; et à cela est d'une grande utilité la logique mathématique.

Certainement on a raisonné, et très bien, pendant longtemps, sans recourir aux lois de cette science tout à fait nouvelle. Mais aussi Diophante a résolu, sans connaître d'Algèbre, un grand nombre des problèmes algébriques parmi les plus difficiles.

Les règles de la logique, pour transformer un ensemble d'hypothèses dans la thèse à prouver, sont analogues aux lois de l'Algèbre pour transformer un ensemble d'équations dans une forme où elles soient résolues par rapport aux inconnues. Ces lois n'ont pas été créées par quelqu'un. On les obtient en examinant les raisonnements bien faits; on analyse les différents passages, et l'on érige en règles ces cas particuliers. Les règles du raisonnement sont les formules mêmes de logique. Elles sont déjà fort nombreuses; et peut-être, on en trouvera encore d'autres. Mais celles dont l'usage est le plus fréquent, et dont les autres sont des conséquences, sont en petit nombre, et toutes très simples.

On prend les hypothèses, on les multiplie entre elles, on transporte, exporte, importe des propositions, on change l'ordre des facteurs logiques, on développe des produits, on substitue aux objets définis leur valeur, on simplifie les produits, les sommes, les déductions au moyen des règles connues, etc., et on obtient lá thèse.

La transformation des démontrations en symboles est beaucoup plus difficile que la transformation des propositions. Tout mathématicien exercé passe d'un coup d'un ensemble d'hypothèses à la déduction. La réduction en formules de ce passage, c'est-à-dire l'analyse de ce raisonnement et sa transformation en une suite de passages, dans lesquels on n'applique qu'une règle à la fois, est en général longue. Mais celui qui a étudié les formules de logique, une à la fois, peut aussi faire d'un coup une série de transformations, comme on peut dans une équation faire plusieurs opérations à la fois.

§ 44. Quelle que soit la façon dont ont fait les raisonnements, si une science ne contient pas des idées primitives, comme cela arrive dans toute théorie élevée, on peut en elle tout définir et tout démontrer. Mais si la science touche aux éléments mêmes, et s'il y a des idées qu'on ne peut pas définir, on trouvera aussi des propositions qu'on ne peut pas démontrer, et dont découlent par le raisonnement toutes les autres. Nous les appellerons propositions *primitives*, et par abréviation Pp; elles s'appellent aussi axiomes, *postulata*, et quelquefois, hypothèses, lois expérimentales, etc. Ces propositions déterminent, ou, si l'on veut, définissent les idées primitives, dont on n'a pas donné de définition directe.

Le choix des propositions primitives a aussi de l'arbitraire; car si des propositions a, b, c on déduit d, et de a, b, d on déduit c, on peut prendre comme propositions primitives les a, b, c ou les a, b, d.

Conclusion.

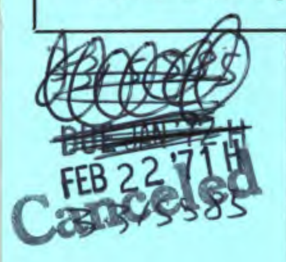
§ 45. Le problème proposé par Leibniz est donc résolu. On peut changer la forme des signes, qu'on a introduits au fur et à mesure qu'on en a besoin; on peut en supprimer, ou en ajouter d'autres, modifier quelques conventions, etc. Mais nous sommes maintenant en cas d'exprimer toutes les propositions de mathématique au moyen de peu de signes, ayant une signification précise, et assujettis à des règles bien déterminées.

Ces notations permettent aussi de résoudre une question pratique, qui s'impose tous les jours davantage. La production mathématique est aujourd'hui énorme. Les centaines de journaux périodiques et les nouveaux livres, écrits dans toutes les langues, forment chaque année des bibliothèques.

Pour en faciliter l'étude, on a proposé des répertoires bibliographiques. Or, tout sujet de mathématique a une très longue bibliographie; et les diverses publications ont une valeur bien différente.

Ce qui nous importe est le groupe des propositions qui énoncent toutes les vérités connues sur un sujet. Réduites en symboles, elles tiennent probablement moins de place que la bibliographie du sujet. L'intérêt historique sera conservé, si chaque proposition est accompagnée du nom de l'Auteur qui l'a énoncée.

Tel est le projet de la *Rivista di Matematica*, qui publie, dans son Formulaire, les recueils des propositions sur les différents sujets de mathématique que nous recevrons, et toutes les corrections et compléments qu'on nous indiquera.


FEB 22 '71 H
Canceled

